UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
***Campus* Cornélio Procópio**
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

BRUNA DE SOUZA SENE BARBOSA

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2017

BRUNA DE SOUZA SENE BARBOSA

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Profª. Drª. Simone Luccas

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2017

Ficha catalográfica elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

de Souza Sene Barbosa, Bruna
d894br GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA:
ung UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA / Bruna de Souza Sene Barbosa; orientador Simone Luccas - Cornélio Procópio, 2017.
165 p.

Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2017.

1. Geometria não Euclidiana. 2. Curvatura positiva. 3. Geometria Esférica. 4. Abordagem histórico-epistemológica. 5. Sequência Didática. I. Luccas, Simone , orient. II. Título.

BRUNA DE SOUZA SENE BARBOSA

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Após realização de Defesa Pública o trabalho foi considerado:

____

BANCA EXAMINADORA

____
Orientador: Profª. Drª. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP/CCP

____
Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP/CCP

Cornélio Procópio, _____de ___________de _____.

Dedico este trabalho ao meu querido esposo Pedro Henrique e aos meus filhos Maria Júlia e Nícolas. Vocês dão sentido à minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me concedeu o dom da vida, por me amparar nos momentos de turbulência e por ter me proporcionado a condição necessária para alcançar vitória.

À minha querida professora, Drª. Simone Luccas, pela maneira afetuosa com que sempre me tratou, pela paciência e atenção concedidas, sempre pronta para me auxiliar no enriquecimento da dissertação. Agradeço pelas discussões enriquecedoras, pelos conselhos e pelos estímulos nos momentos difíceis.

Ao meu esposo Pedro Henrique, por ter sido tão atencioso, compreensivo e amoroso mesmo quando enfadado com suas atividades diárias, mostrou-se sempre disposto a me ouvir e a me aconselhar quando necessário.

Aos meus filhos Maria Júlia e Nícolas, que sofreram (e muito) com a minha constante ausência. Meus amores, um dia vocês entenderão que tais atos foram necessários para proporcionar-lhes um futuro melhor. Amo vocês infinitamente!

Aos meus pais Lucélia e Carlos, que cuidaram diariamente, incansavelmente e com tanto amor dos meus pequenos para que a conclusão deste Mestrado pudesse ser realizado. Gratidão!

Aos meus sogros Marta e Pedro, pelo apoio constante.

Aos professores Drª. Annecy Tojeiro Giordani, Dr. João Coelho Neto, Drª. Letícia Jovelina Storto, Dr. Lucken Bueno Lucas, Drª. Marilia Bazan Blanco, Drª. Marlize Spagolla Bernardelli, Dr. William Junior do Nascimento, que contribuíram com minha formação como pesquisadora.

Aos professores Drª. Ângela Marta Pereira das Dores Savioli e Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira pelas ricas contribuições e análises críticas divulgadas no exame de qualificação.

Aos professores Dr. João Coelho Neto, Drª. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim e Dorotéia Maria Silva Rívolli pelas contribuições para o desenvolvimento desta pesquisa.

À primeira turma do PPGEN pela parceria, conselhos e cooperação. Tive muita sorte em fazer parte dessa turma repleta de pessoas boníssimas, dispostas a ajudar quando necessário.

Ao Grupo de Pesquisa em Ensino e Formação Profissional – GPEFOP que coloborou para o aprimoramento desta pesquisa.

Às secretária do Programa de Pós Graduação em Ensino, Daniele e Mariana pela prontidão que sempre demonstraram quando necessitei.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação.

Porque para Deus nada é impossível.

Lucas 1:37

BARBOSA, BRUNA DE SOUZA SENE. **Geometria não euclidiana de curvatura positiva:** uma proposta de sequência didática. 2017. 165 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

RESUMO

Esta pesquisa visa investigar como se dá a elaboração de uma Sequência Didática para o Ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva – Geometria Esférica, segundo a abordagem metodológica de ensino histórico-epistemológica voltada para alunos da 1ª série do Ensino Médio. Para isto, foram utilizados encaminhamentos metodológicos de Pesquisa, Ensino, Sequência Didática e Análise dos Dados. A relevância desta dissertação, e do produto elaborado, deve-se ao fato de que, embora a Geometria não Euclidiana, sobretudo a Geometria Esférica esteja presente nos conteúdos estruturantes das Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática é pouco abordada em sala de aula. Portanto, a elaboração de um estudo e de uma Sequência Didática que contemplem este assunto, contribui para a disseminação do conhecimento matemático. A pesquisa, de natureza qualitativa, busca levantar os trabalhos já desenvolvidos envolvendo o tema, por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura. Para a elaboração da Sequência Didática, nos apoiamos em Zabala e elaboramos atividades voltadas para o ensino de estudantes que cursam o Ensino Médio. A abordagem metodológica de ensino utilizada foi a histórico-epistemológica, uma vez que esta é capaz de dar sentido à aprendizagem de conteúdos matemáticos. Os dados foram analisados à luz da Análise Textual Discursiva, proposta por Moraes e Galiazzi. A Sequência Didática (produto educacional) foi aplicada no Colégio ECEL, situado na cidade de Bandeirantes-PR, a uma turma da 1ª série do Ensino Médio composta por vinte e cinco alunos. Os resultados foram satisfatórios visto que a maioria dos alunos analisados desenvolveram as atividades de maneira adequada; afirmaram que a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica viabilizou a aprendizagem; e, concordam que a abordagem histórico-epistemológica articulada com a estratégia de jogo gerou efeitos positivos na aprendizagem. A partir dos resultados expressivos, podemos afirmar que o Produto Educacional desenvolvido à luz da abordagem histórico-epistemológica foi eficiente no ensino da Geometria de curvatura positiva.

Palavras-chaves: Geometria não Euclidiana. Curvatura positiva. Geometria Esférica. Abordagem histórico-epistemológica. Sequência Didática.

BARBOSA, BRUNA DE SOUZA SENE. **Non-Euclidean geometry of positive curvature:** a proposal of a didactic sequence. 2017. 165 p. Course Completion Work (Professional Master's in Teaching) - Northern State University of Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

ABSTRACT

This research aims to investigate the elaboration of a Didactic Sequence for teaching non-Euclidean Geometry with Positive Curvature - Spherical Geometry - based on the methodological approach of historical-epistemological teaching directed to students in the 1st grade of High School. To do so, methodological referrals of Research, Teaching, Didactic Sequence and Data Analysis were used. The relevance of this dissertation and the elaborated product is that even though non-Euclidean Geometry, especially Spherical Geometry, is present in the structuring contents of the Basic Mathematics Education Curriculum Guidelines, it is still little discussed in class. Therefore, the elaboration of a study and a Didactic Sequence that takes this topic into account contributes to the dissemination of mathematical knowledge. This qualitative research presents works concerning this topic, by means of a Systematic Review of Literature. The elaboration of the Didactic Sequence and its activities directed to the teaching of high school student was based on Zabala's studies. The methodological approach of teaching used was the historical-epistemological one since it could give meaning to the learning of mathematical contents. The data were analyzed from a Discursive Textual Analysis, proposed by Moraes and Galiazzi. The Didactic Sequence (educational product) was used at ECEL School, which is located in the city of Bandeirantes - PR, in a high school 1st-grade class composed of twenty-five students. The results were satisfactory once most of the analyzed students developed the appropriately. Those students considered that the methodological approach of Historical-Epistemological teaching made learning possible and agreed that the historical-epistemological approach articulated with the game strategy generated positive effects in learning. From the expressive results, we can claim that the Educational Product developed from the historical-epistemological approach was efficient in the teaching of geometry of positive curvature.

Keywords: Non-Euclidean geometry. Positive curvature. Spherical Geometry. Historical-epistemological approach. Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Faz-se necessário, em nossa prática docente, utilizar-se de diferentes metodologias de ensino para trabalhar conteúdos em sala de aula de modo que envolva os alunos e os motivem aprender. Para tanto, ao ensinar um conteúdo matemático alguns questionamentos devem ser levados em consideração, tais como: quando, onde, porque e em qual contexto determinado conteúdo originou-se e quais eram as necessidades da época para que tal descoberta tenha ocorrido.

Nesta direção a abordagem metodológica de ensino histórico-epistemológica tem apontado respostas satisfatórias a algumas destas questões.

De acordo com D'amore (2007b, p. 3) uma concepção epistemológica é:

> um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los.

Ainda segundo o autor, o trabalho epistemológico define-se como "uma tentativa de identificar e de unificar concepções epistemológicas diferentes relativas a determinadas ciências, a movimentos intelectuais, a grupos de pessoas, a instituições, ou a culturas" (D'AMORE, 2007b, p. 3).

Assim, utilizar a abordagem histórico-epistemológica no Ensino da Matemática é fundamental para que o discente compreenda a natureza da disciplina e sua relevância no desenvolvimento da sociedade.

Desta forma, o presente estudo buscará responder à pergunta: *A abordagem histórico-epistemológica constitui uma metodologia que viabiliza o ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva a alunos da 1ª série do Ensino Médio?*

Considerando tal questionamento definimos como objeto de estudo a Geometria de Curvatura Positiva, também conhecida como Geometria Esférica, prevista nas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná como conteúdo básico.

Com o intuito de salientar a importância deste assunto e cooperar com sua disseminação no Ensino Médio, definimos como objetivo geral de nossa pesquisa **investigar como se dá a elaboração de uma Sequência Didática para o Ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva – Geometria Esférica, segundo uma abordagem metodológica histórico-epistemológica, voltada a alunos da 1ª série do Ensino Médio.**

A partir desse objetivo geral, elegemos como objetivos específicos:

- Desenvolver estudos teóricos acerca da Geometria não Euclidiana, especificamente da Geometria Esférica;
- Investigar a abordagem histórico-epistemológica enquanto campo de pesquisa teórica e abordagem metodológica de ensino;
- Pesquisar aspectos teóricos da sistematização da didática da Matemática;
- Elaborar uma sequência didática envolvendo o conhecimento da Geometria Esférica, levando em consideração os preceitos da didática da Matemática;
- Realizar a análise dos dados oriundos da aplicação da sequência didática, à luz da Análise Textual Discursiva.

O Ensino das Geometrias na Educação Básica configura-se como um conteúdo de extrema importância, capaz de "desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepções, entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente, o mundo no qual vivemos" (CARVALHO; TUCCI, 2011, p. 3).

Apesar dos benefícios e da importância de trabalhar as Geometrias na Educação Básica, pesquisas evidenciam que seu ensino se encontra muito condensado. Segundo Lorenzato (1995), os professores deixam o ensino de Geometria em segundo plano por falta de formação adequada, dando prioridade a conteúdos algébricos e aritméticos.

Quando nos referimos à Geometria Euclidiana, apesar dos percalços em seu ensino, é possível constatar progressos ocorridos atualmente, pois de acordo com Pais (2006) o conteúdo já não é mais apresentado no final do livro didático. Hodiernamente esse assunto encontra-se no início ou distribuído ao longo de todo o livro, o que colabora para oferecer a devida importância ao conteúdo. Porém, o autor deixa claro que apenas a alteração da localização do conteúdo no livro não é suficiente, devendo o educador apresentar atitudes pedagógicas favoráveis à valorização da matéria.

O ensino das Geometrias não Euclidianas depara-se com obstáculos ainda maiores. Muito embora esteja inserido nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE (PARANÁ, 2008), da Rede Pública Estadual, como conteúdo a ser abordado na disciplina de Matemática, ainda é pouco trabalhado em sala de aula, resultando no desconhecimento do aluno em relação ao assunto e na negligência de professores que não dão a ela o devido tratamento.

Dentre as diferentes Geometrias não Euclidianas que deveriam ser abordadas no Ensino Médio, encontram-se a Geometria Esférica, Hiperbólica, Geometria dos Fractais e Geometria Projetiva. Tais Geometrias, segundo as DCE, devem conduzir o aluno para que o mesmo:

> perceba as diferentes necessidades das geometrias não euclidianas para a compreensão dos conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; compreenda a necessidade das geometrias não euclidianas para o avanço das teorias científicas; articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; conheça os conceitos básicos da Geometria Elíptica[1]; Hiperbólica e Fractal (PARANÁ, 2008, p. 81).

De acordo com as Diretrizes Curriculares, a Geometria Elíptica deve se fundamentar por meio

> [...] do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Apesar da orientação em se trabalhar com o conteúdo, os educadores poucas vezes utilizam-no em sua prática e, de acordo com Brum e Schuhmacher (2013), um dos fatores associado à objeção em trabalhar com a

---

[1] “Felix Klein (1849 – 1925) chamou à geometria da esfera **geometria elíptica;** à geometria euclidiana, **geometria parabólica;** e à geometria de Lobachevsky, **geometria hiperbólica**” (KATZ, 2010, p. 1021). Embora nas DCEs a Geometria de curvatura positiva seja denominada como Geometria Elíptica, optamos por denominá-la como Geometria Esférica.

Geometria Esférica em sala de aula está atrelado à formação inicial deficitária do professor, pois os cursos de Licenciatura em Matemática não incluíam em suas ementas as Geometrias não Euclidianas.

Como se não bastasse a formação insuficiente, Brum e Schuhmacher (2013) enfatizam o fato de que a maioria dos professores apoiam-se demasiadamente no livro didático para preparar suas aulas, o que se configura um problema, pois grande parte destes livros não faz menção às Geometrias não Euclidianas.

Levando em consideração a presença tímida ou até a ausência desse assunto na Educação Básica, foi realizada uma Revisão Sistemática de Literatura[2], para averiguar como a Geometria não Euclidiana vem sendo trabalhada, desde sua inserção nas Diretrizes Curriculares de Matemática, no ano de 2008, até os dias atuais, no Banco de Teses e Dissertações e em periódicos da área de Ensino, como detalhado a seguir, em diferentes bases de dados.

A primeira pesquisa ocorreu no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por meio do processo de busca manual no período compreendido entre 2006 e 2016. O rastreamento foi realizado com os descritores “Geometria não Euclidiana” obtendo um total de 29 registros; com os descritores “Geometria Esférica” foram encontrados 65 registros. Dentre os 94 trabalhos publicados com a temática, apenas 13 articulavam a Geometria Esférica com a Matemática, visto que foram excluídos aqueles que relacionavam a Geometria Esférica com a Geografia, bem como aqueles cujo foco estava voltado para outras Geometrias não Euclidianas, a saber: Geometria Hiperbólica, Fractal e Projetiva. Os trabalhos encontrados estão elencados no Quadro 1.

[2] “A Revisão Sistemática de Literatura é uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema” (SAMPAIO, MANCINE, 2007, p. 84).

Quadro 1 – Trabalhos do Banco de Teses e Dissertação da CAPES

Título	Autor/Ano	Programa/ Universidade
Abordagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio Usando uma Sequência Didática	Wanderley Pivatto Brum (2013)	PPGECIM – Universidade Regional de Blumenau
Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares	Leandro de Jesus Dueli (2013)	PROFMAT – Universidade Federal de Juiz de Fora, Rio de Janeiro
Geometria Esférica: Uma Proposta de Atividades com Aplicações	Idelmar André Zanella (2013)	PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina
Geometria Esférica: Proposta de Atividades em Conexão com a Geografia	Luciane Hein (2013)	PROFMAT - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Rio de Janeiro
Geometrias não Euclidianas como Anomalias: Implicações para o Ensino de Geometria e Medidas	Ana Karla Silva do Nascimento (2013)	PPGECNM/CCET - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal
Geometrias não-euclidianas na escola: Uma Proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica	Ricardo Silva Ribeiro (2013)	PPGEM - Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre
Triângulos Esféricos	Paulo Airton Cordeiro de Souza (2013)	PROFMAT - Fundação Universidade Federal do Piauí, Rio de Janeiro
Geometria Esférica	Mário José Vieira (2013)	PROFMAT – Universidade Federal do ABC, Santo André
Uma Abordagem de Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica: Geometria Esférica	Osnildo Andrade Carvalho (2014)	PROFMAT - Instituição de Ensino: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Rio de Janeiro
Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica	Marcello Pereira Gomes (2014)	PROFMAT - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro
Elementos da Trigonometria Triangular Esferica	Rodson da Silva Santos (2014)	PROFMAT - Fundação Universidade Federal De Roraima, Rio de Janeiro
Geometrias Hiperbólica e Esférica: uma proposta didática baseada na resolução de problemas	Anna Barth Gimenes Oliveira (2015)	PROFMAT - Universidade Estadual de Londrina

Uma introdução à Geometria Esférica	Welder Dan Silva (2015)	PROFMAT - Instituição de Ensino: Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho - Rio Claro, Rio de Janeiro

Fonte: Os Autores (2017)

Em geral, as dissertações encontradas fazem relações entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas e propõem uma Sequência de Atividades para auxiliar o professor de Matemática em seu ofício.

Para a segunda pesquisa, selecionamos Periódicos de relevância no cenário nacional cujo foco e escopo estavam voltados ao Ensino de Matemática, compreendendo o período de 2005 a 2016, classificados no Periódicos CAPES – Qualis 2014, como A1, A2 e B1.

No Quadro 2 elencamos os Periódicos nas quais a pesquisa foi realizada, bem como a quantidade de artigos consultados.

Quadro 2 – Quantidade de artigos pesquisados e selecionados em Periódicos

Revista	**Artigos pesquisados**	**Artigos selecionados**
BOLEMA: Boletim de Educação Matemática (A1)	537	04
Ciência e Educação (A1)	515	00
Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências (A2)	257	00
IENCI: Investigações em Ensino de Ciências (A2)	284	00
Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (A2)	272	00
REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática (B1)	182	00

Zetetiké: Revista de Educação Matemática (B1)	196	02
Total	2243	06

Fonte: Os Autores (2017)

Encontramos 06 artigos com as temáticas "Geometria não Euclidiana" ou "Geometria Esférica", publicados em 07 periódicos científicos nacionais das áreas de Ensino. Os artigos pesquisados representaram aproximadamente 0,3% do total de 2.243 artigos publicados no período, o que revela a quantidade ínfima de publicações que abordam o tema.

Com os dados levantados nota-se a presença tímida, e até a ausência do estudo das Geometrias não Euclidianas, não somente na Educação Básica, bem como nos cursos de Licenciaturas em Matemática e livros didáticos, mas também nas pesquisas científicas realizadas na última década, o que impede o contato de alunos e futuros professores com as diferentes Geometrias.

Com a intenção de contribuir para amenizar o contexto ora descrito, a Geometria não Euclidiana, com ênfase na Geometria Esférica, foi definida como tema desta pesquisa, a fim de salientar sua importância e colaborar para sua disseminação.

Após a justificativa da pesquisa, sistematizamos os capítulos que compõem a dissertação:

- **Capítulo 1:** apresentamos a fundamentação teórica, englobando o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas, iniciando com as discussões em torno do quinto Postulado de Euclides até desencadear na Geometria Esférica. Neste interim, são abordados os cuidados necessários para desenvolver uma pesquisa histórica.

- **Capítulo 2:** abordamos os aportes teórico-metodológicos de ensino, envolvendo a Didática da Matemática – cujo objetivo é desconstruir a ideia de que para ensinar Matemática, basta saber Matemática. A abordagem histórica e a abordagem histórico-epistemológica são apresentadas como procedimentos metodológicos para o ensino da Matemática.

- **Capítulo 3:** apoiados em Zabala (2010), o capítulo envolve o conceito, as características de uma Sequência Didática, a tipologia dos conteúdos que devem ser abordados e como se dá a avaliação dos mesmos.
- **Capítulo 4:** apresentamos o perfil dos sujeitos da pesquisa, bem como a descrição das atividades contempladas na Sequência Didática.
- **Capítulo 5:** exibimos na íntegra a Sequência Didática envolvendo as Geometrias não Euclidianas, com ênfase na Geometria Esférica, à luz da abordagem histórico-epistemológica.
- **Capítulo 6:** apresentamos a análise dos dados à luz da Análise Textual Discursiva, apoiados em Moraes e Galiazzi (2014). De acordo com cada categoria estabelecida expomos os fragmentos das atividades realizadas pelos alunos, bem como as sínteses reflexivas elaboradas pelos pesquisadores.
- **Considerações Finais:** expusemos as reflexões acerca da realização da pesquisa.

No item seguinte, Fundamentação Teórica, iniciamos com a apresentação da abordagem metodológica assumida neste trabalho.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DE PESQUISA

As pesquisas qualitativas, de acordo com Godoy (1995), visam responder questões que abrangem as relações sociais entre os indivíduos. Desta forma, “um fenômeno pode ser mais bem observado e compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte” (GODOY, 1995, p. 62). Assim, o pesquisador deve ter consciência de que ele mesmo fará o papel de observar, coletar e interpretar os dados coletados para o desenvolvimento da pesquisa.

Com o objetivo de compreender amplamente o tema investigado, qualquer fato é relevante e deve ser examinado com cautela, pois para o referido autor, “os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto”. Para tais pesquisadores é relevante fazer uma investigação abrangente, visando a assimilação de todas as fases que uma pesquisa exige.

Levando em consideração o tema estabelecido e os objetivos planejados para nossa investigação, decidimos desenvolver uma pesquisa de natureza qualitativa de cunho bibliográfico, a partir de materiais já publicados, como livros, artigos científicos, teses, dissertações, anais, dicionários, enciclopédias, jornais, revistas, entre outros.

Este tipo de pesquisa é de fundamental importância, sobretudo quando engloba fatos muito afastados pelo espaço ou tempo. Desta forma, Gil (2002, p. 45), defende que “a pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos”.

No próximo item, discorreremos a respeito dos cuidados historiográficos necessários para desenvolver uma pesquisa.

1.1.1 CUIDADOS HISTORIOGRÁFICOS

Realizar uma síntese histórica não é uma tarefa fácil de ser executada. É necessário cercar-se de alguns cuidados para produzir uma pesquisa relevante e séria.

O primeiro desafio refere-se à escolha do tema a ser pesquisado, este não deve ser demasiadamente explorado por outros pesquisadores, nem deve ser um assunto pouco abordado, correndo o risco de se elaborar uma pesquisa muito limitada por falta de documentação que viabilize seu desenvolvimento.

Além disso, Martins (2005, p. 308), nos orienta que:

> Em uma pesquisa, não faz sentido repetir coisas que já foram feitas, ou chegar a conclusões já aceita por todos, sem acrescentar nada de novo. Uma pesquisa deve procurar trazer novos conhecimentos históricos ou criticar e corrigir conhecimentos antigos.

Um assunto a ser investigado depende muito do enfoque determinado para o seu desenvolvimento. Sobre um mesmo tema pode-se elaborar inúmeros trabalhos que possuem questões distintas e relevantes para a comunidade científica.

Após a escolha do assunto – que, segundo Martins (2005), deve ser um que não seja completamente desconhecido pelo autor a fim de evitar problemas futuros – é necessário realizar um levantamento das pesquisas historiográficas já elaboradas para ter noção do que já foi levantado e definir um tema relevante para a pesquisa.

O interesse do autor em relação ao assunto é um ponto que deve ser levado em consideração, além do nível de conhecimento que se tem sobre ele, pois em geral as pesquisas são realizadas em curto prazo.

As fontes utilizadas no desenvolvimento de uma síntese histórica são muito relevantes, podendo ser primárias ou secundárias, desde que sejam seguras. As fontes primárias são os trabalhos originais escritos na época em que a pesquisa foi desenvolvida, chamados também de manuscritos. As fontes secundárias são trabalhos desenvolvidos a partir da leitura e estudo de obras originais, contendo concepções e observações a respeito das fontes primárias, tais como biografias, teses e dissertações, artigos científicos, entre outros. Há ainda as fontes terciárias, contudo essas fontes já se encontram um pouco mais distantes das fontes originais e sofridas duas interpretações (interpretação e reinterpretação dos manuscritos). Desse modo, para um trabalho científico, é interessante a utilização das duas primeiras fontes, quando possível.

Todos os cuidados elencados devem ser considerados no desenvolvimento de uma síntese histórica, já que esses trabalhos referem-se a uma reconstrução de fatos que ocorreram há muitos anos e estão sujeitos à interpretações errôneas. Martins (2005) afirma que esses trabalhos podem apresentar alguns problemas, tais como:

> O primeiro deles consiste em uma História da Ciência puramente descritiva, repleta de datas e informações que não têm qualquer relevância para aquilo que está sendo estudado. Este tipo de História da Ciência apresenta, muitas vezes, alguns indivíduos como gênios que tiraram suas ideias e contribuições do nada e outros como verdadeiros imbecis que faziam tudo errado. Passa ao leitor uma visão completamente distorcida do processo de construção do pensamento científico (MARTINS, 2005 p. 314).

É necessário considerar apenas as informações relevantes e ignorar as irrelevantes, tais como fatos pessoais que nada se relacionam com o desenvolvimento do conhecimento científico. Outro cuidado é com os sujeitos envolvidos, pois não é prudente rotular os indivíduos que discordavam dos novos conhecimentos que estavam se desenvolvendo, visto que tinham seus argumentos e por vezes, eram muito bons.

Outro problema que deve ser evitado nas pesquisas históricas é o anacronismo, que segundo Martins (2005, p. 314), consiste em “estudar o passado com os olhos do presente”. Não se deve julgar os acontecimentos levando em consideração os conhecimentos que foram adquiridos muito posteriormente. É preciso considerar os recursos, contextos sociais e conhecimentos disponíveis na época para reconhecer a genialidade de muitos pesquisadores.

Outra situação errônea é utilizar a História da Ciência de maneira ideológica, isto é, em apoio a propósitos nacionalistas, políticos ou religiosos. Para isso, torna-se imprescindível evitar o chamado apudismo[3], usado quando uma pessoa não busca os trabalhos originais e se baseia em trabalhos secundários ou terciários no desenvolvimento de sua pesquisa e, desta forma acaba por validar informações presentes nestes trabalhos sem antes conferi-las nas fontes primárias, colaborando para a disseminação de erros de interpretações que podem ocorrer. Desta forma, Martins (2005, p. 315) afirma que:

---

[3] Termo utilizado por Martins (2005) ao se referir ao ato de não acessar diretamente a fonte citada, mas sim o texto de um autor que cita outro autor.

> Toda narração histórica é uma seleção ou recorte da história. Ao fazer este recorte, o historiador pode selecionar e descrever apenas os fatos que corroborem seu ponto de vista e ocultar os fatos que entrem em conflito. Neste caso, ele não estará apresentando as ideias daquele estudioso de forma fiel, pois estará omitindo aspectos importantes e sua narrativa será tendenciosa.

Nesta dissertação, procuramos evitar os erros historiográficos e respeitar as orientações de Martins (2005). Selecionamos, em fontes seguras, um assunto e uma abordagem metodológica que não são tão discutidos em dissertações, teses e artigos científicos, como comprova a revisão sistemática.

As fontes utilizadas para a elaboração desta pesquisa são seguras, partindo de livros, artigos científicos, teses e dissertações.

1.2 Postulados de Euclides

Euclides de Alexandria, viveu por volta de 325 a. C. e 260 a. C., e foi um dos matemáticos mais célebres da Antiguidade. Presume-se que tenha frequentado a escola platônica de Atenas por volta de 300 anos a.C. e sua obra mais famosa é a intitulada *Os Elementos*, a qual trata de Geometria Plana e Espacial e Teoria dos Números, é ainda muito utilizada na era contemporânea.

A obra completa, é constituída de quatrocentos e sessenta e cinco proposições divididas em treze livros. Os primeiros seis, referem-se à geometria plana, seguido de três livros que tratam da Teoria dos Números, um livro sobre os Incomensuráveis e por fim, três tratando da Geometria no Espaço (EVES, 2011).

Os Elementos de Euclides foi, e ainda é, considerada uma obra de grande valia e, segundo Eves (2011), após a primeira edição de *Os Elementos*, no ano de 1.482, em Veneza, mais de mil edições foram produzidas; por mais de dois mil anos esta foi a obra predominou no ensino de Geometria. Tão grandiosa é a obra de Euclides que nenhum trabalho, com exceção da Bíblia, foi tão amplamente estudado, nem exerceu tamanha influência na comunidade científica.

A obra *Os Elementos* compreende um compêndio dos conhecimentos matemáticos gregos já existentes até aquela época, ou seja, Euclides reuniu o que já era conhecido e distribuiu ao longo dos treze livros além de suas próprias contribuições (KATZ, 2010).

O Livro I apresenta 23 definições, 5 noções comuns (axiomas), os famosos 5 postulados e 48 proposições (teoremas), todos se tratando da Geometria Plana. “As definições, axiomas [...] e postulados não possuem demonstração e devem ser admitidos. As proposições, ou teoremas, são provadas a partir de definições, postulados, noções comuns e teoremas anteriores, através do método dedutivo” (SILVA, 2006, p. 5).

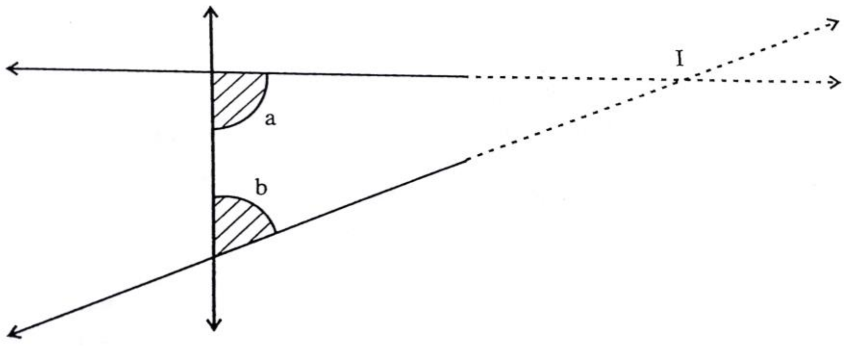
Neste trabalho, destacaremos apenas os cinco postulados presentes no primeiro livro de Euclides, a saber:

> I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

O primeiro Postulado mostra que é possível traçar uma reta entre dois pontos e o segundo revela que uma determinada reta pode ser prolongada infinitamente. O terceiro refere-se à construção de uma circunferência cujo centro encontra-se em qualquer ponto e cujo raio possui qualquer medida. O quarto foi necessário para dar sentido ao quinto, visto que, ao anunciar que todos os ângulos retos são iguais, toma-se o ângulo reto (90°) como medida padrão para os ângulos. Já o quinto Postulado afirma que duas retas não paralelas, se encontrarão em algum ponto ao serem prolongadas (KATZ, 2010).

Dentre os Postulados enunciados por Euclides, o quinto foi o mais polêmico (COUTINHO, 2001), pois seu texto não era de simples compreensão. Desta maneira, foram diversos os matemáticos que trabalharam durante mais de 2000 anos em busca de sua classificação, a fim de certificar-se se tratava de um postulado ou de um teorema, passível de demonstração. A Figura 1 esboça o quinto Postulado de Euclides, tal como foi previsto originalmente.

Figura 1 – Esboço I do quinto Postulado

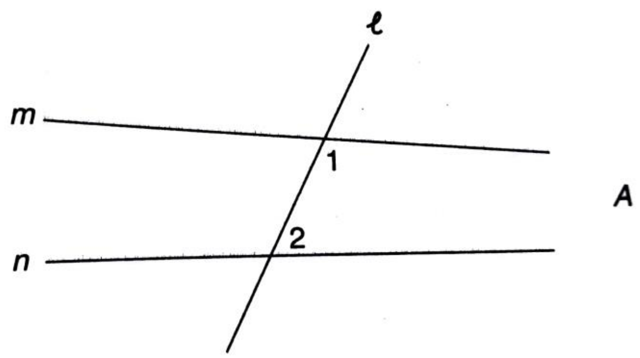


Fonte: Coutinho (2001, p. 34)

O quinto Postulado e seu esboço exibida na Figura 2 é apresentado por Katz (2010, p. 80) da seguinte forma:

> Se uma linha recta cai em duas linhas rectas, de forma a que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam menores que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se forem prolongadas indefinidamente, encontram-se no mesmo lado em que os ângulos são menores que dois ângulos rectos (KATZ, 2010, p.80).

Figura 2 – Esboço II do quinto Postulado



Fonte: Katz (2010, p. 81)

O quinto Postulado, conhecido mais tarde como postulado das paralelas, também pode ser expresso por: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta” (EVES, 2011, p. 539). Este substituto proposto por John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos, por ser de fácil compreensão.

A discussão a respeito do quinto Postulado é muito antiga. Ptolomeu I (século II) já tentava demonstrá-lo como um teorema, assim como Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Carl Frederich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-860) e Nikolai Lobachevsky (1793-1856).

De acordo com Eves (2011), Girolamo Saccheri foi um jesuíta autor da primeira publicação, em 1773, de um estudo de fato científico a respeito do quinto Postulado de Euclides. Enquanto lecionava retórica, filosofia e teologia no Colégio Jesuíta em Milão, ficou fascinado com o método de redução ao absurdo[4] presente na obra de Euclides *Os Elementos.* Anos mais tarde, publicou seu livro intitulado como *Lógica Demonstrativa,* no qual apresentava o método de Redução ao Absurdo na lógica formal.

Quando Saccheri lecionou na Universidade de Pávia, publicou um livro intitulado *Euclides Livre de Toda Imperfeição*, cujo conteúdo girava em torno da aplicação do método de Redução ao Absurdo no estudo do quinto Postulado de Euclides. No entanto, o livro só foi publicado poucos meses após sua morte, em 1733 (EVES, 2011).

Nesse livro, Saccheri admite as 28 proposições de Euclides e a partir disso realiza o estudo do quadrilátero demonstrado na Figura 3:

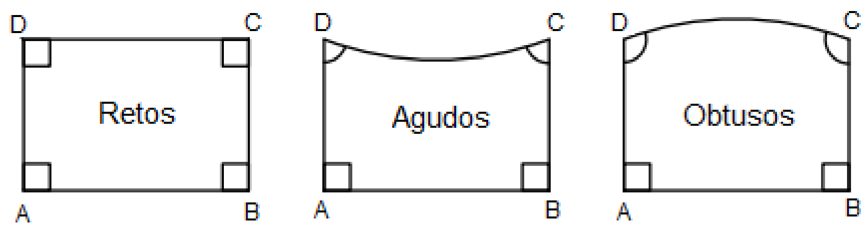
Figura 3 - Quadrilátero de Saccheri

Fonte: Adaptado de Gomes (2014)

[4]O método de redução ao absurdo consiste inicialmente em admitir como verdadeira a negação de determinada afirmação e continuando-se o processo de demonstração observa-se, como consequência, o surgimento de uma contradição, o que torna a negação da hipótese inicial um absurdo (GALVÃO; SANTOS; BARBOSA, 2016, p. 1).

No quadrilátero, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos retos e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. Saccheri mostrou com alegações simples utilizando algumas das 28 proposições iniciais de Euclides que $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são iguais, podendo ser retos, obtusos ou agudos. As três possibilidades receberam, por Saccheri, a denominação de *hipótese do ângulo reto, hipótese do ângulo obtuso e hipótese do ângulo agudo,* como demonstra a Figura 4 (EVES, 2011).

Figura 4 – Hipóteses de Saccheri



Fonte: Adaptado de Santos (2016)

A intenção de Saccheri era demonstrar que a possibilidade dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ serem obtusos leva a uma contradição e atingiu o objetivo facilmente, porém nunca conseguiu provar inteiramente a hipótese desses ângulos serem agudos, o que leva também a uma contradição. Pelo método de redução ao absurdo os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ eram retos. O trabalho rendeu diversas proposições resultantes da tentativa de negar o quinto postulado; uma delas seria que duas retas paralelas não são equidistantes (CARMO, 1987).

Resgatando o trabalho de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também iniciou seus estudos na tentativa de contradizer o quinto postulado obtendo resultados estranhos, porém sem conseguir negá-lo. Destacamos uma das proposições alcançadas: “a diferença para dois ângulos retos da soma dos ângulos internos de um triângulo não é zero, como na geometria usual, porém proporcional à área do triângulo” (CARMO, 1987, p. 30).

Embora tenha ficado claro que não era possível provar esse postulado como um teorema, toda essa mobilização proporcionou a compreensão, por alguns matemáticos, de que o postulado poderia ser negado sem que contradições ocorressem, pois as tentativas de Saccheri e D’Alembert de demonstrar o quinto Postulado proporcionaram vestígios de uma nova Geometria, conhecida como Geometria não Euclidiana.

Como evidência dessa descoberta, Carmo apresenta em seu trabalho um trecho traduzido por Sjöstedt de uma carta do matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 - 1855), endereçada a Taurinos, em 1824:

> A hipótese que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° conduz a uma geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana), que é em si própria inteiramente satisfatória para mim, de tal modo que posso nela resolver qualquer problema, exceto a determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori (SJÖSTEDT, 1968, p. 341-342 apud CARMO, 1987, p. 31)[5].

Fica evidente que Gauss tinha em mãos o desenvolvimento da Geometria de curvatura negativa, também conhecida como Geometria Hiperbólica, porém optou por não tornar público suas conclusões por receio da não aceitação de uma geometria diferente da Euclidiana, considerada na época como absoluta.

Poucos anos mais tarde, quase que simultaneamente e sem o conhecimento das pesquisas um do outro, János Bolyai (1802 - 1860) e Nikolai Lobachevsky (1793 - 1856) chegam às mesmas conclusões que Gauss já havia chegado em 1824. O primeiro, um matemático húngaro, publicou suas conclusões em 1832 como apêndice de um livro de Matemática de seu pai Farkas Bolyai. Lobachevsky, um matemático russo, já havia publicado suas conclusões em 1829, no entanto, devido à falta de agilidade com que as novas informações se propagavam, e por conta dos obstáculos linguísticos, sua pesquisa permaneceu desprezada por anos.

Em razão dessa nova Geometria fugir do senso comum, o próprio Lobachevsky deu a ela o nome de "Geometria imaginária" (BOYER, 2012) e em 1829 publicou seu artigo intitulado *"Sobre os Princípios da Geometria"*, determinando oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana, mais especificamente da Geometria Hiperbólica. Neste documento, o matemático russo exibe uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides, a saber: "por

---

[5] Não foi possível localizar o trabalho original e, devido à importância desta referência, optamos por colocá-la.

um ponto C fora de uma reta AB podem ser traçadas mais de uma reta no plano que não encontram AB” (BOYER, 2012, p. 365).

Percebendo a validade e a importância desta nova Geometria, Lobachevsky dedicou 20 anos de pesquisa, entre 1835 e 1855, e publicou outras três obras completas relacionadas à Geometria Hiperbólica. Publicou em russo um trabalho intitulado *Novos Fundamentos da Geometria* (1835-1838); divulgou em alemão as *Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas* (1840) e em 1855, publicou seu livro *Pangeometria,* em francês e russo. Esta última obra rendeu-lhe o reconhecimento oficial como criador da Geometria Hiperbólica, conquistando elogios de Gauss e, por indicação dele, Lobachevsky foi eleito membro na Sociedade Científica de Göttingen (BOYER, 2012).

Após o surgimento da Geometria Hiperbólica era natural que se pensasse na existência de outra nova Geometria (COUTINHO, 2001); foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica.

Riemann iniciou seus estudos no curso de Teologia na Universidade de Göttingen, porém ao se interessar por Matemática, mudou o curso para Filosofia. Em 1847 mudou-se para a Universidade de Berlim a fim de estudar com Steiner, Jacobi, Dirichlet e Eisenstein e posteriormente, em 1849, retornou à Universidade de Göttingen, onde concluiu seu doutorado com uma tese extraordinária introduzindo as Superfícies de Riemann (EVES, 2011).

Em 1854 foi admitido pela Universidade de Gottingen como professor oficial não remunerado e para isso apresentou um artigo contendo suas suposições sobre os fundamentos da Geometria, apresentando possibilidades de novas geometrias e novos espaços.

Segundo Eves (2011, p. 614) “de todos os artigos comparáveis a esse em tamanho, nenhum se mostrou mais rico em implicações em toda a história da Matemática; nele se apresenta uma generalização ampla de espaço e geometria”, contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física. Foi a partir da Geometria Riemanniana que Albert Einstein pode encontrar o contexto necessário para a teoria da relatividade (EVES, 2011).

Conhecido como Postulado de Riemann quaisquer duas retas contidas em uma esfera possuem um ponto de intersecção, isto é, ao considerar uma superfície de curvatura positiva, as “retas”[6] se encontram em mais de um ponto (COUTINHO, 2001). Sendo assim, abriu-se caminho para o desenvolvimento da Geometria Esférica.

As brilhantes contribuições de Riemann no desenvolvimento da Matemática e da Física renderam-lhe, em 1859, o cargo de professor titular na Universidade de Göttingen, sucedendo Dirichlet em uma cadeira que antes havia sido ocupada por Gauss; mas em 1866 o célebre matemático faleceu na Itália, aos 40 anos, vítima de tuberculose (EVES, 2011).

No item seguinte, trataremos a respeito do conceito de curvatura a fim de distinguir em qual superfície as diferentes geometrias se aplicam.

1.3 CURVATURA

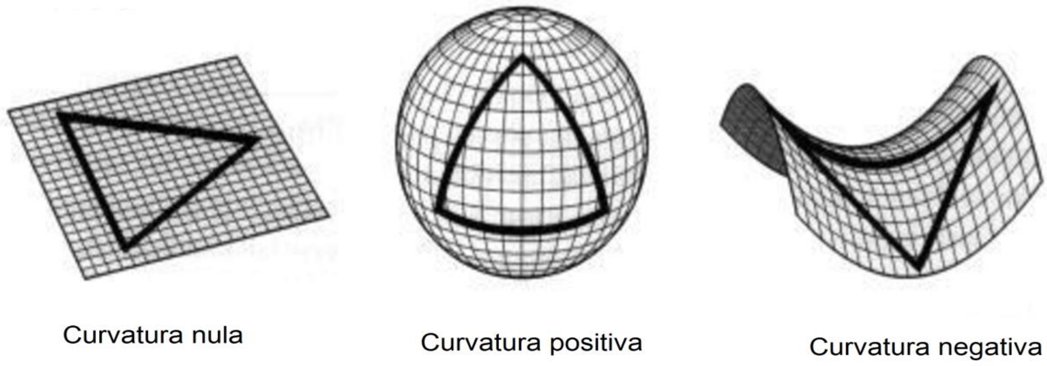
Em geometria é conveniente refletir e formular ideias ou definições em consonância com as diferentes curvaturas: nula, positiva ou negativa. Mas o que é uma curvatura?

Há diferentes definições de curvatura de uma superfície, como a apresentada por Oliveira (2015, p. 41), como sendo “a medida escalar da taxa da variação da direção do vetor normal unitário em torno da superfície”. Contudo, para compreender essa definição é necessário ter um conhecimento vetorial mais aprofundado, o que não se aplica ao nível de ensino destinado desta pesquisa; assim, a definição menos complexa encontrada é dada pelo dicionário Houaiss (2009), como sendo a “taxa de variação da inclinação da tangente a uma curva em relação ao comprimento de arco”.

Para uma melhor compreensão, basta pensar que um plano possui curvatura nula, uma esfera possui curvatura positiva e uma hipérbole possui curvatura negativa. Na Figura 5 está representado um triângulo traçado em cada uma das superfícies com as diferentes curvaturas.

[6] Na Geometria Esférica as retas são os Círculos Máximos ou Geodésicas contidas em uma Superfície Esférica (COUTINHO, 2001).

Figura 5 - Curvatura das superfícies



Fonte: http://noticiasseleccionvaldeandemagico.blogspot.com.br/2015_07_01_archive.html

Na superfície de curvatura nula, a área de um círculo de raio *r* é dada por πr^2 e o comprimento de uma circunferência é encontrado aplicando a fórmula $2\pi r$. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, isto é, 180°; por dois pontos traçamos uma única reta; por um ponto P fora de uma reta podemos traçar uma única reta paralela à reta dada.

Na superfície de curvatura positiva, os teoremas aplicados na Geometria Plana não se aplicam, pois, a área de um círculo de raio *r* é menor que πr^2 e o comprimento de uma circunferência é menor que $2\pi r$ (PETIT, 1982, p. 18); a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540°; dois pontos determinam uma ou mais geodésicas (retas) na superfície esférica; por um ponto P fora de uma reta dada não é possível traçar retas paralelas à reta dada.

Na superfície de curvatura negativa, a soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois retos, isto é, 180°; um círculo de raio *r* possui área maior que πr^2 e o comprimento de uma circunferência excede $2\pi r$ (PETIT, 1982); neste tipo de curvatura também é possível afirmar que, por um ponto P fora de uma reta dada podemos traçar mais de uma reta paralela à reta dada.

Segundo Petit (1982) uma das maneiras de verificar se uma superfície possui curvatura positiva ou negativa é fazer o teste da embalagem. Ao tentar revestir uma esfera com um pedaço de papel, aparecem pregas, isto é, há sobras de papel. Ao tentar revestir uma superfície de curvatura negativa com um elemento plano, há falta de papel, ou seja, rupturas acontecem.

No plano, uma reta compreende a menor distância entre dois pontos e pode ser alongada infinitamente em ambas as direções. Na superfície de curvatura positiva, a reta é intitulada como geodésica, sendo que a menor distância entre dois pontos é determinada por um arco formado pelo círculo máximo que intersecta esses dois pontos e, uma geodésica é finita, porém ilimitada (no próximo item há um esclarecimento mais detalhado desse conceito).

Levando em consideração os apontamentos acima feitos em torno da curvatura das superfícies o próximo item tratará especificamente da Geometria Esférica.

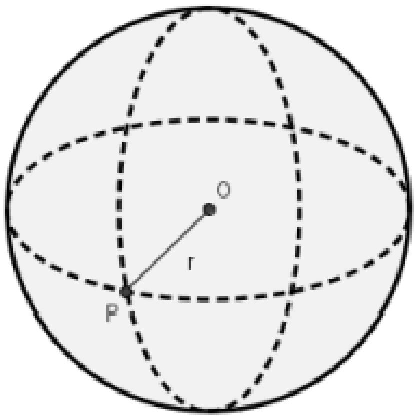
1.4 GEOMETRIA ESFÉRICA

Na Geometria Esférica, Riemann (1826-1866) contradiz o quinto postulado de Euclides anunciando que “quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro” (COUTINHO, 2001, p. 73). Nesta geometria as retas são finitas, pois ao traçar uma geodésica retornamos ao ponto de partida; e ilimitadas, porque é possível percorrê-la ilimitadamente; a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e menor a 540º e, por dois pontos é possível traçar mais de uma reta (COUTINHO, 2001).

Além dessas propriedades e em consonância com as orientações das Diretrizes Curriculares (PARANÁ, 2008), apresentamos algumas definições da Geometria Esférica que podem ser trabalhadas com alunos da 1ª série do Ensino Médio, que compõem a amostra da pesquisa.

1. Esfera: Seja *O* um ponto qualquer e *r* um número real positivo, define-se esfera o conjunto de pontos *P* de um espaço, cuja distância entre *O* e *P* é menor ou igual a *r* (ZANELLA, 2013).

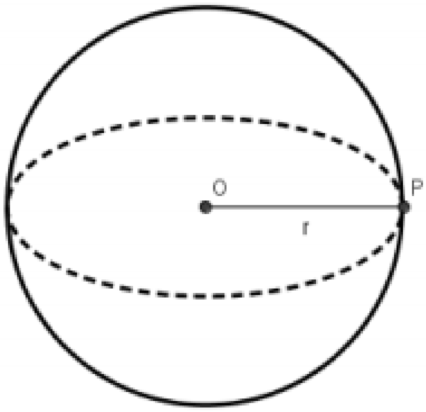
Figura 6 – Esfera



Fonte: Zanella (2013, p. 43)

2. **Superfície Esférica:** Seja *O* um ponto e *r* o raio, superfície esférica é o conjunto de pontos *P* do espaço, cuja distância é igual a *r* (ZANELLA, 2013).

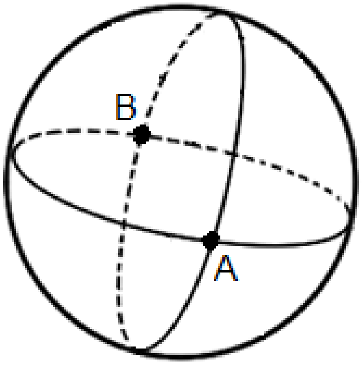
Figura 7 - Superfície Esférica



Fonte: Zanella (2013, p. 43)

3. **Ponto e Reta na Superfície Esférica:** Por ponto, Riemann estabeleceu como uma posição e por reta, designou como circunferências máximas ou geodésicas traçadas na superfície esférica. No Postulado de Riemann, tomando a esfera como superfície, quaisquer duas retas interceptam-se em dois pontos distintos, como mostra a Figura 8 (COUTINHO, 2001).

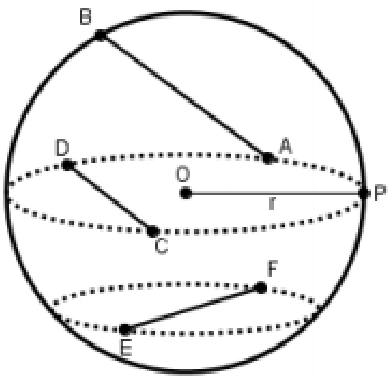
Figura 8 - Ponto e Reta na Geometria Esférica



Fonte: Adaptado de Bagio; Rolkouski (2014)

4. **Corda da Superfície Esférica:** Define-se corda o segmento de reta compreendido entre dois pontos que fazem parte da esfera. São cordas: AB, CD, EF e OP, como mostra a Figura 9 (ZANELLA, 2013).

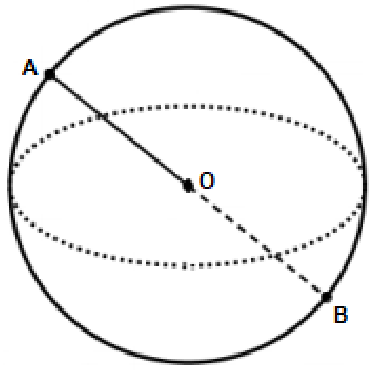
Figura 9 - Corda da Superfície Esférica



Fonte: Zanella (2013, p. 44)

5. **Diâmetro de uma Superfície Esférica:** É uma corda que percorre dois pontos extremos pertencentes à superfície esférica e passa pelo centro. A medida do diâmetro é igual a 2*r.* Na figura 10, AB representa o diâmetro da esfera (ZANELLA, 2013).

Figura 10 - Diâmetro da Esfera

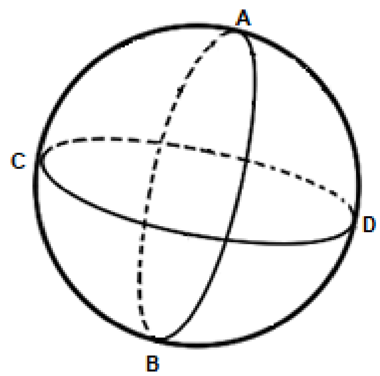


Fonte: Adaptado de Zanella (2013, p. 45)

6. Pontos Antípodas: São pontos extremos pertencentes a um segmento de reta que passa pelo centro. Este segmento de reta é denominado diâmetro da esfera. Na Figura 10, os pontos A e B são antípodas (ZANELLA, 2013).

7. Circunferência Máxima: Dentre todas as circunferências possíveis de serem traçadas em uma superfície esférica, Circunferência Máxima é aquela que possui o mesmo raio da esfera, ou seja, a maior circunferência possível de ser traçada na superfície (ZANELLA, 2013). Na Figura 11, estão representadas duas Circunferências Máximas, uma que passa por A e B e outra que passa por C e D.

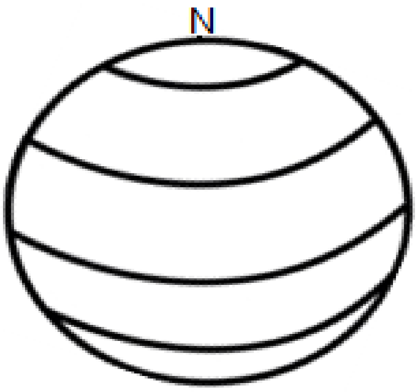
Figura 11 - Circunferências Máximas



Fonte: Adaptado de Bagio; Rolkouski (2014)

8. Circunferências Paralelas: É possível traçar um conjunto de circunferências na esfera gozando de um mesmo polo N. Petit (1982) as nomeou de circunferências paralelas, como mostra a Figura 11.

Figura 12 - Circunferências Paralelas na Esfera



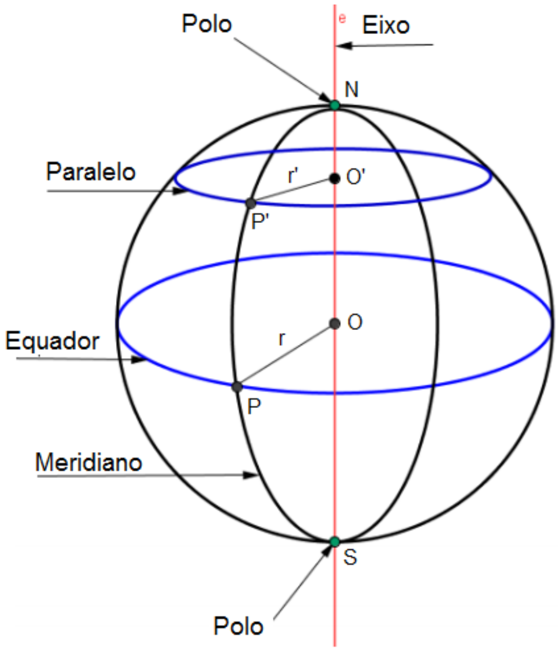
Fonte: http://www.freepik.es/iconos-gratis/bola-de-rayas_755792.htm

9. Elementos Notáveis da Superfície Esférica:

I. **Eixo:** Qualquer reta que passa pelo centro O.
II. **Polos:** São os pontos de intersecção de um eixo com a superfície esférica.
III. **Equador:** É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular a um eixo.
IV. **Paralelo:** Plano perpendicular a um eixo e paralelo ao Equador.
V. **Meridiano:** É uma semicircunferência máxima que liga os polos e passa pelo eixo.

Tais elementos estão indicados na Figura 13 a seguir.

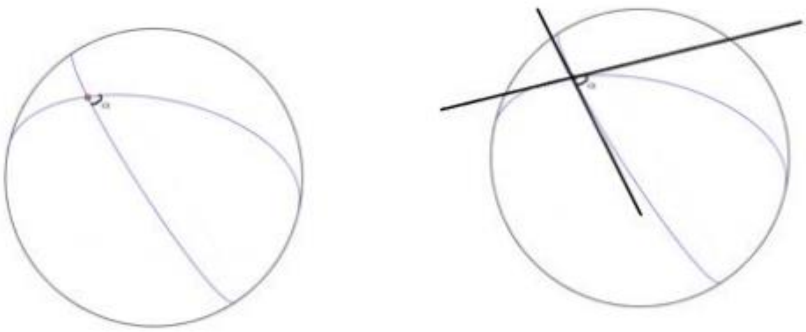
Figura 13 - Elementos Notáveis de uma Superfície Esférica



Fonte: Zanella (2013, p. 47)

10. Ângulo Esférico: É a região formada por dois arcos de circunferências máximas. O ponto onde as duas circunferências se encontram é denominado vértice do ângulo, assim como expõe a figura 14 (ZANELLA, 2013).

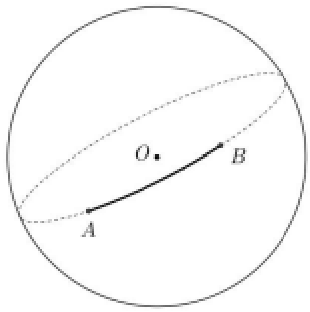
Figura 14 - Ângulo Esférico



Fonte: Gomes (2014, p. 35)

11. Geodésica: É a menor distância entre dois pontos contidos na superfície esférica. Na geometria Euclidiana, a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta que liga os pontos; na Geometria Esférica a menor distância entre dois pontos é um arco de uma circunferência máxima, denominado geodésica. A Figura 15 exibe uma geodésica (ABREU, 2015).

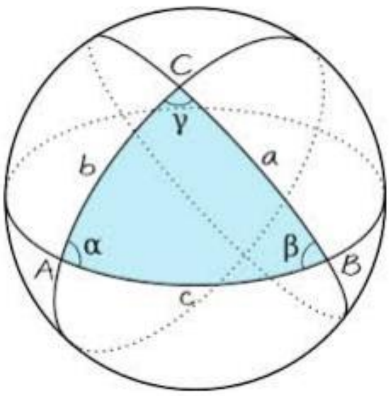
Figura 15 – Geodésica



Fonte: Abreu e Ottoni (2015, p. 10)

12. Triângulo Esférico: Triângulo contido em um hemisfério da superfície esférica gerado pelos arcos de três circunferências máximas; tais arcos devem ser menores que uma semicircunferência máxima. Na figura 16, as geodésicas a, b e c são os lados do triângulo; A, B e C são os vértices, e α, β e γ estão representando os ângulos internos do triângulo esférico (ZANELLA, 2013).

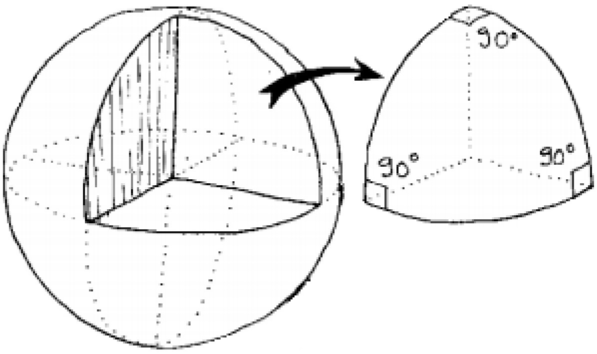
Figura 16 - Triângulo Esférico



Fonte: Abreu e Ottoni (2015, p. 11)

Na superfície esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo está compreendida ente 180° e 540°, porém não assume esses valores. Quanto menor for o triângulo esférico, mais perto de 180° essa soma está. Ao traçar três circunferências máximas (duas que passam pelos polos, cujo ângulo formado entre si é igual a 90° e uma terceira em que o plano é perpendicular ao eixo, ou seja, a linha do Equador), é possível obter um triângulo trirretângulo e trirretilátero. Trirretângulo porque possui todos os ângulos retos, cuja soma de seus ângulos internos resulta em 270°, e trirretilátero porque suas geodésicas são de mesmas medidas (ZANELLA, 2013). Este triângulo ocupa 1/8 da superfície da esfera, como expõe a Figura 17 (PETIT, 1982).

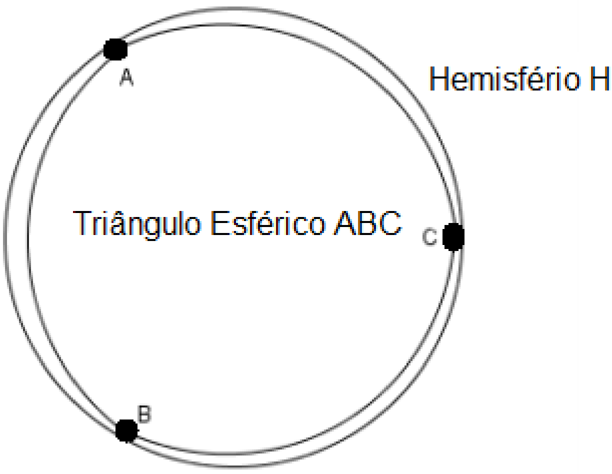
Figura 17 -Triângulo tri-retângulo e equilátero



Fonte: Petit (1982, p. 24)

Se os três vértices de um triângulo esférico estiverem muito próximos a uma circunferência máxima, a soma de seus ângulos internos tende a 540°, contudo não admite esse valor.

Figura 18 - Triângulo Esférico cuja soma de seus ângulos internos tendem a 540°



Fonte: Zanella (2013, p.61)

De acordo com Coutinho (2001), os triângulos esféricos são classificados em:

- retângulo, se possuir um único ângulo reto;
- birretângulo, se apresentar dois ângulos retos;
- trirretângulo se dispor de três ângulos medindo 90°.

Os lados de um triângulo contidos na superfície esférica são "medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera, e desta forma pode ser medidos em graus ou radianos" (ANDRADE, 2011, p. 50).

Segundo Coutinho (2001), os triângulos esféricos podem ter diferentes denominações de acordo com seus lados, sendo:

- retilátero se conter um único lado medindo 90°;
- birretilátero se possuir dois lados medindo 90°;
- trirretilátero caso seus três lados meçam 90°.

13. Área de uma Superfície Esférica[7]: A área é dada por A = $4\pi r^2$, cujo raio tem medida r (ABREU; OTTONI, 2015).

14. Volume da Esfera[8]: O volume de uma esfera cujo raio tem medida r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$ (ABREU; OTTONI, 2015).

Apresentamos os elementos mais relevantes da Geometria Esférica, os quais são essenciais para qualquer trabalho com esse conteúdo. Com o objetivo de dar sustentação teórica para a construção de uma Sequência Didática envolvendo a Geometria Esférica, o próximo item tratará da Abordagem Metodológica de Ensino.

[7] Uma demonstração mais elaborada da área de uma Superfície Esférica também pode ser encontrada em Abreu e Ottoni (2015).

[8] Uma demonstração mais elaborada do Volume da Esfera pode ser encontrada em Abreu e Ottoni (2015). Disponível em <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Shyrlene%20Martins%20de%20Abreu%20Versao%20Final.pdf> Acesso em 15 mai 2017.

2 APORTES TEÓRICO-METODOLÓGICOS DE ENSINO

2.1 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Para compreendermos melhor o que é a Didática da Matemática, devemos compreender primeiramente a Didática Geral. De acordo com D'Amore (2007a), a Didática Geral:

> I. Discute aspectos pedagógicos, de aprendizagem e ensino inerentes da formação docente;
> II. Aponta os problemas que podem ser enfrentados em sala de aula e desta forma, como identificá-los e compreendê-los;
> III. Visa a formação inicial do docente e não se refere às disciplinas em si.

Desta forma, a Didática Geral preocupa-se em preparar o docente para ensinar de maneira eficiente, a sinalizar como os estudantes aprendem os conteúdos, a determinar a melhor abordagem metodológica tendo em vista as capacidades de cada sujeito, a definir quais os instrumentos mais apropriados para avaliar, entre outros.

Contudo, todos esses pontos são insignificantes se não estiverem fundamentados teoricamente. Segundo D'Amore (2007a), essas bases teóricas só podem estar solidificadas se os conhecimentos da Didática Geral forem adquiridos em consonância com a Didática específica de cada disciplina – neste caso, a Didática da Matemática – com o intuito de compreender o conhecimento teórico em conjunto com os conhecimentos experienciais.

D'Amore recorre a Vergnaud (1985a apud D'AMORE, 2007a, p. 32) para buscar o conceito de Didática, argumentando que "a Didática de uma disciplina estuda os processos de transmissão e aquisição relativos ao domínio específico dessa disciplina, ou das ciências próximas com as quais ela interage".

Para D'Amore (2007a) é preciso desconstruir a ideia de que é apenas necessário dominar os conteúdos matemáticos para ensinar Matemática. Segundo ele, nunca foi assim e nunca será. Nesse sentido o que mais um professor deve saber para ensinar os conteúdos matemáticos? O que vem a ser a Didática da Matemática?

Para D'Amore (2007a, p. 4), a Didática da Matemática é "a arte[9] de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito".

Enxergar a Didática da Matemática como arte gerou uma consequência instigante, pois "o seu objeto de trabalho é essencialmente o ensino de Matemática; seu objetivo é criar situações (na forma de aulas, atividades, objetos, ambientes, jogos, ...) para um melhor ensino de Matemática" (D'AMORE, 2007a, p. 34).

Desta forma, o autor destaca que o professor é o protagonista da situação, sendo que este deveria fazer o possível para que o aluno aprendesse. Por outro lado, D'Amore (2007) afirma que a convicção de que o ensinar é um meio de instrução, é pura ilusão. Não se deve jogar toda a responsabilidade no ensino, pois não proporciona segurança nenhuma de aprendizagem.

Para D'Amore (2007a, p. 37) há dois modos de enxergar a Didática da Matemática: "**A:** como divulgação das ideias, fixando a atenção na fase do ensino (**A** de **A**rs, em referência à sua tradução latina); **B:** como pesquisa empírica, fixando a atenção na fase da aprendizagem".

Nesta dissertação, nossos objetivos estão voltados ao ensino de um conteúdo matemático e, portanto, assumimos a Didática da Matemática como o modo **A**. Nesse tipo de Didática, D'Amore defende um ensino por meio da História da Matemática.

Entre os tipos de História da Matemática que ele defende, aquela que aborda o desenvolvimento dos fatos é a mais apropriada para este trabalho, pois "explica a origem das ideias, dos problemas, das teorias que fizeram da Matemática aquilo que é hoje" (D'AMORE, 2007a, p. 40). Desta forma, dissemina que a Matemática é um conhecimento que está em constante desenvolvimento; uma ciência feita por seres humanos e para benefícios próprios, suprindo necessidades culturais e sociais, como visto no capítulo 3.

---

[9] "O termo arte deve ser entendido como a tradução do latim ars, isto é um conjunto dificilmente separável dos atuais termos arte e artesanato; artista era, na acepção latina, qualquer artista (no sentido moderno da palavra), mas também qualquer artesão; no mundo latino essas duas figuras fundiam-se numa só, sem possibilidade de distinção (D'AMORE, 2007a, p. 4).

A utilização didática da História da Matemática como um meio para se ensinar o conteúdo matemático pode melhorar o modo como os alunos percebem a Matemática, além de estimular a atenção, o comprometimento e a motivação dos mesmos.

Uma aula de Matemática cansativa, monótona, repetitiva e que não permite que os alunos sintam-se motivados a aprender, colabora para desenvolver uma imagem negativa tanto da disciplina, quanto do professor, comprometendo sua prática docente.

D'Amore (2007a) defende que para ensinar Matemática é necessário que o docente possua três conhecimentos: 1°) Conhecimento da Matemática; 2°) Conhecimento da Didática da Matemática e 3°) Conhecimento da Didática Geral.

Esses três itens juntos formam o educador que visa atingir os melhores resultados possíveis ao ensinar um conteúdo matemático. Nesse sentido, há uma concordância com o autor, pois entende-se que a interação e a articulação entre esses três "elementos" podem dar sustentação para o professor, propiciar um contexto fértil para que ocorra a aprendizagem.

2.2 Abordagem Histórica no Ensino da Matemática

A utilização da História da Matemática no Ensino tem sido discutida mundialmente por diversos pesquisadores em conferências, grupos de estudos e em toda a comunidade científica, podendo ser utilizada como uma abordagem metodológica de ensino ou como um campo de investigação teórica (LUCCAS, 2004).

Nesse sentido, Nobre e Baroni (1999) apontam que algumas pesquisas associando a História e a Educação Matemática vem sendo desenvolvidas, tais como: a história da Educação Matemática; as concepções da História da Matemática que professores apresentam; como a História da Matemática é abordada na formação dos professores de matemática e dos próprios matemáticos; como a História da Matemática vem sendo utilizada enquanto recurso pedagógico.

Mediante essas pesquisas, percebemos que é inegável a contribuição da História da Matemática enquanto campo de pesquisa teórica, como apontam Miguel (1993), Matthews (1995), Ubiratan (1999), Nobre e Baroni (1999), Luccas (2004), entre outros. No entanto, vale ressaltar que, enquanto abordagem metodológica de ensino, as pesquisas em História da Matemática são mais recentes.

De acordo com Matthews (1995), a primeira conferência internacional sobre “História, Filosofia, Sociologia e o Ensino de Ciências” ocorreu em 1989 na Flórida, seguida de várias outras patrocinadas pela União Europeia de Física realizadas em Pávia (1983), Munique (1986), Paris (1988) e Cambridge (1990). Em 1987, a mais importante conferência que abordava “História da ciência e o ensino de ciências” ocorreu na Universidade de Oxford com o apoio da Sociedade Britânica de História da Ciência.

O ensino de Ciências estava sendo desenvolvido completamente dissociado de sua História e Filosofia. As conferências que abordavam a temática, ocorridas a partir de 1983, cooperaram para que houvesse uma reaproximação entre tais vertentes, enriquecendo tanto a teoria, quanto a prática no ensino de Ciências (MATTHEWS, 1995). Tais conferências forneceram inúmeros estudos acadêmicos voltados para a temática e contribuíram para o desenvolvimento de materiais didáticos, histórica e filosoficamente fundamentados.

No Brasil, a discussão estava voltada para a inserção da História da Matemática na formação de professores, iniciando-se em 1989 no Primeiro Encontro Paulista de Educação Matemática (I EPEM) em Campinas. Neste encontro ficou evidenciado a ausência da disciplina História da Matemática nos cursos de Licenciatura do país (FRAGOSO, 2011), como destacado por Miguel e Brito nos anais do evento.

O mesmo tema foi abordado em Blumenau (SC) em 1992 no IV ENEM (IV Encontro Nacional de Educação Matemática); em 1995, no Recife (PE) no I SNHM (I Seminário Nacional de História da Matemática); e também em 1995 no V ENEM realizado em Aracajú (SE). Segundo Fragoso (2011), esses encontros foram o ponto de partida para a inserção da História da Matemática no currículo dos Cursos de Licenciaturas do Brasil.

Apesar de toda essa mobilização, apenas em 2001 foi estabelecida a obrigatoriedade da História da Matemática na matriz curricular das Licenciaturas; porém, percebemos que anos antes já se discutia a importância desta disciplina na formação docente, uma vez que além dos diversos encontros ocorridos a partir de

1989, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) também destacaram a sua importância em 1997 com a seguinte menção:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1997, p. 30).

Desta forma, inserir a disciplina de História da Matemática nos cursos de formação de professores pode contribuir para a existência de profissionais melhores preparados para ministrar conteúdos matemáticos atrelados ao seu contexto histórico.

Atualmente, a História da Matemática, junto com resolução de problemas, modelagem matemática, mídias tecnológicas, etnomatemática e investigações matemáticas fazem parte das tendências metodológicas de ensino da Educação Matemática, presentes nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (Paraná, 2008). Esse documento aponta que tais tendências devem ser utilizadas ao abordar conteúdos matemáticos e servem para fundamentar a prática docente.

Segundo Luccas (2004), a inserção da abordagem histórica no Ensino é defendida sob o argumento de que pode cooperar para o desenvolvimento de um indivíduo mais crítico e reflexivo acerca do conteúdo estudado e proporcionar a compreensão da trajetória do conhecimento no decorrer do tempo.

Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) recomendam a utilização da História da Matemática enquanto abordagem metodológica de ensino por contribuir positivamente com o ensino e a aprendizagem do conhecimento.

Brasil (1998, p. 42) defende a utilização de tal abordagem afirmando que:

> ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático.

A abordagem histórica possibilita ao aluno compreender que a Matemática, em seus primórdios, é fruto da criação humana, desenvolvida para suprir necessidades reais. Fazer uso deste recurso enquanto abordagem metodológica de ensino, segundo Luccas (2004) pode não somente ajudar a contextualizar conceitos matemáticos, como também despertar a curiosidade e o interesse do aluno em aprender, fazendo com que a aprendizagem se torne efetiva. Desta forma, a História é capaz de suprir o "mar de falta de significação que se diz ter inundado as salas de aula de ciências" (MATTHEWS, 1995, p. 165).

Frequentemente, o conhecimento matemático é apresentado aos alunos por meio da manipulação de fórmulas e equações sem significação, sem relacionar aquele conhecimento com o seu contexto histórico e social, fazendo com que a aprendizagem do conteúdo se torne enfadonha.

Apresentar os conteúdos matemáticos em seu contexto histórico pode permitir que o aluno os veja não como algo pronto e acabado, mas como uma área que está em plena formação. Por seu turno a História da Matemática pode ajudar o aluno a entender os porquês da Matemática e, assim, colaborar para a construção de um olhar mais crítico sobre os seus objetos de conhecimento (BRASIL, 1998).

Além dessas funções, Miguel (1993) elenca uma lista de outros objetivos alcançados com a utilização da História da Matemática, tais como: fonte de motivação, recreação, desmistificação, cultura, epistemologia, entre outros.

Apesar dos inúmeros benefícios que a abordagem Histórica proporciona, Antônio Miguel defende que ela só pode surtir efeitos positivos "quando devidamente reconstituída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático" (1993, p. 108).

Assim, a história do conhecimento matemático não pode se restringir a nomes e datas dos acontecimentos, nem se referir à leitura de trechos da história de cada conteúdo inserido no Plano de Trabalho Docente, mas deve ser encarada como "um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos" (BRASIL, 1998, p. 43).

Para fazer bom uso da história do conhecimento matemático na Educação Básica, é indispensável uma adequação na formação do professor, a fim de que este insira em sua prática pedagógica esta abordagem e se aproprie de matérias didáticos pertinentes para este fim (MATTHEWS, 1995).

No próximo tópico iremos discorrer a respeito da Abordagem Histórico-Epistemológica no Ensino da Matemática, uma vez que esta abordagem possibilita a compreensão das estruturas do conhecimento.

2.3 ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

É por intermédio de um ramo da Filosofia, mais especificamente da Epistemologia, que passamos a compreender a estrutura do conhecimento matemático. O quadro a seguir, baseado na tese de doutorado de Bernardelli (2014, p.34), sistematiza as noções de Epistemologia que diversos pesquisadores apresentam:

Quadro 03 – Noções de Epistemologia

Autores	Noção de Epistemologia
Astolfi e Develay (1995, p. 15)	A reflexão epistemológica propõe-se um exame da estrutura do saber ensinado: quais são seus principais conceitos que funcionam na disciplina, quais relações unem esses conceitos.
Adúriz-Bravo (2001, p. 64)	A epistemologia ajuda no cumprimento dos objetivos programados para a educação científica.
Paruelo (2003, p. 329)	A epistemologia é uma das ferramentas necessárias para o desenvolvimento de novas estratégias para a facilitação da aprendizagem das ciências.
Cachapuz et al (2005, p. 73)	A epistemologia está necessariamente implícita em qualquer currículo de ciências. É dela em boa parte a concepção de ciência que é ensinada. É nessa convicção, pois, que o conhecimento de epistemologia torna os professores capazes de melhor compreender que ciência estão a ensinar, ajuda-os na preparação e na orientação a dar às suas aulas e dá um significado mais claro e credível às suas propostas.
Esteban (2010, p. 49)	A epistemologia, ou teoria do conhecimento, é aquele conjunto de saberes que é objeto de estudo da ciência (sua natureza, sua estrutura, seus métodos).

Fonte: Bernardelli (2014, p. 34)

Acrescentando a essas noções, D’Amore (2007a, p. 49) afirma que a Epistemologia é um “Ramo da Filosofia que estuda a maneira pela qual os conhecimentos científicos de certa área específica são construídos”.

Diante das ponderações apresentadas, podemos perceber que a Epistemologia é capaz de atribuir significado ao ensino do conteúdo científico, tanto para o professor quanto para o aluno, pois é por meio desta que é possível questionar a respeito da estrutura dos conhecimentos desenvolvidos no decorrer do tempo (LUCCAS, 2004).

Além disso, Lucas (2010, p.25) afirma que a Epistemologia favorece as "análises epistemológicas corretas de conceitos, no domínio do ensino de Ciências, e pode ajudar na transposição de barreiras da contradição e da falta de significado que podem levar muitos estudantes ao não entendimento de assuntos científicos".

Desta forma, uma metodologia de ensino baseada na abordagem histórico-epistemológica pode promover uma aprendizagem efetiva do conhecimento matemático, haja vista que o aluno pode compreender a origem, a trajetória, os desdobramentos e os contextos em que o conhecimento foi desenvolvido.

Corroborando com a afirmação acima, Esteban (2010) define a perspectiva epistemológica como:

> [...] uma forma de compreender e explicar como conhecemos o que sabemos: Que tipo de conhecimento obteremos em uma pesquisa? Que características terá esse conhecimento? Que valor podemos dar aos resultados obtidos? Essas, entre outras, são questões epistemológicas (ESTEBAN apud BERNARDELLI, 2014, p. 35)

Conforme Bernardelli (2014), as indagações de Esteban (2010) nos conduzem ao caminho que devemos seguir para chegarmos ao conhecimento científico; para isso cada disciplina deve desenvolver e aprimorar seus conteúdos de ensino segundo a epistemologia da área.

Por meio da epistemologia do conhecimento estudante e professor tornam-se capazes de refletir, contextualizar, criticar e indagar a respeito dos desdobramentos dos acontecimentos matemáticos, ampliando suas concepções de aprendizagem e de ensino da Matemática.

Segundo Lucas (2010), de acordo com seus referenciais teóricos o professor pode promover um estreitamento entre conhecimentos didáticos, epistemológicos e históricos, além de propiciar um melhor entendimento do conteúdo científico proposto, colaborando para o aperfeiçoamento do pensamento crítico do aluno.

Utilizar uma metodologia que articule a História e a Epistemologia possibilita ao aluno a compreensão de que o conhecimento científico desenvolveu-se na tentativa de resolver problemas científicos, ou de ordem prática, cabendo à escola a responsabilidade de trabalhá-los.

De acordo com D'AMORE (2007b, p. 3) uma concepção epistemológica envolve:

> [...] um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los;

Assim, fica evidente que a abordagem Histórico-Epistemológica possibilita tanto a aprendizagem de conteúdos, quanto contribui para a formação de um indivíduo letrado cientificamente.

Em um período em que o ensino de Matemática é apresentado em livros didáticos com atividades conceituais e descontextualizadas (CARAÇA, 2002), a abordagem histórico-epistemológica pode se mostrar como um elo integrador entre o conteúdo científico e seu ensino.

Podemos perceber que ao incentivar o aluno a aprender fazendo indagações a respeito dos conhecimentos produzidos no decorrer da história, proporcionamos um ambiente interessante de redescobertas, de forma que tais indagações manifestadas durante esse processo são como degraus que possibilitam conhecer com mais riqueza a evolução do conhecimento (PINHEIRO, 2016).

Desta forma, a abordagem Histórico-Epistemológica possibilita uma ampla compreensão do conhecimento matemático investigado. Esta abordagem é a defendida nesta pesquisa.

3 APORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO PARA A ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com Zabala (2010), um dos principais objetivos do docente é melhorar, cada vez mais, sua prática educativa. Essa competência pode ser adquirida por meio do conhecimento e da experiência. Mas, segundo o autor, há alguns pontos a serem discutidos: Será que nossos conhecimentos e nossas experiências são adequadas para serem colocadas em prática e atingir resultados satisfatórios? Estes resultados satisfatórios são os mesmos para todos os professores? Estamos cientes daquilo que pode ser melhorado em nosso ofício? As experiências de nossos colegas são adequadas para serem admitidas e aplicadas no ensino em que acreditamos? Reconhecemos aquilo que fazemos bem feito, o que está satisfatório e os pontos que podemos melhorar em nossa prática? O ponto chave para responder a essas indagações está na avaliação que fazemos de nossa função.

Nossa profissão não pode ser reconhecida e desenvolvida apenas por meio da prática. Há a necessidade de embasá-la teoricamente. Mas devemos admitir que em nosso ofício não existe referenciais teóricos que deem conta da complexidade do contexto escolar, visto que em salas de aula ocorrem "muitas coisas ao mesmo tempo, rapidamente e de forma imprevista, e durante muito tempo, o que faz com que se considere difícil, quando não impossível, a tentativa de encontrar referências ou modelos para racionalizar a prática educativa" (ZABALA, 2010, p. 14).

Muito embora esses referenciais não nos apresentem fórmulas prontas e acabadas para serem aplicadas em nossa prática, é de suma importância que nos utilizemos deles para interpretar o que acontece dentro de uma sala de aula, mesmo que somente um, ou poucos aspectos, sejam considerados de cada vez.

Confirmando estas argumentações, Zabala (2010, p. 15) declara que "[...] se dispomos de conhecimentos deste tipo, nós os utilizaremos previamente ao planejar, no próprio processo educativo, e, posteriormente, ao realizar uma avaliação do que aconteceu". Desta forma, visamos uma prática educativa baseada na reflexão da ação e para tanto, necessitamos de referenciais teóricos que colaboram para que a análise da ação educativa seja efetiva.

Se a prática reflexiva for um objetivo que almejamos atingir, devemos levar em conta que o ensino requer ações anteriores e posteriores, ou seja, requer o planejamento, a aplicação e a avaliação da ação (ZABALA, 2010).

Assim, partindo deste princípio processual da prática educativa, uma das etapas que compõem o processo de ensino e aprendizagem são as denominadas atividades ou tarefas. Por atividades ou tarefas consideramos qualquer ação praticada para favorecer a aprendizagem do aluno, podendo ser: um debate, exercícios, pesquisas, leitura de textos, observações, entre outros. Atividades ou tarefas também podem ser definidas como:

> uma unidade básica do processo de ensino/aprendizagem, cujas diversas variáveis apresentam estabilidade e diferenciação: determinadas relações interativas professor/alunos e alunos/alunos, uma organização grupal, determinados conteúdos de aprendizagem, certos recursos didáticos, uma distribuição do tempo e do espaço, um critério avaliador; tudo isto em torno de determinadas intenções educacionais, mais ou menos explícitas (ZABALA, 2010, p. 17).

As atividades propostas para o ensino são capazes de proporcionar diversos benefícios, tanto para o aluno quanto para o professor, visto que é a partir delas que podemos analisar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos. Cada uma apresentará um objetivo diferente, ou seja, atividades propostas para serem realizadas individualmente possui um valor diferente daquelas propostas para serem realizadas em grupo.

Desta forma, para melhor conduzir o processo de ensino e aprendizagem, é importante que cada conteúdo estudado disponha de uma gama diferenciada de atividades, haja vista que é insuficiente aplicar uma única tarefa ou um único tipo de atividade para avaliar o desempenho do aluno na aprendizagem de conteúdos.

Levando em conta a importância que as atividades assumem quando as inserimos em uma sequência sistematizada, reconhecemos uma nova unidade de investigação, chamadas de sequências de atividades ou sequências didáticas[10], que segundo Zabala (2010, p. 18) “permitirá o estudo e a avaliação sob uma perspectiva processual, que inclua as fases de planejamento, aplicação e avaliação”.

De acordo com Zabala (2010, p. 18), uma sequência didática corresponde a “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e fim conhecidos, tanto pelos professores como pelos alunos”.

Os exercícios que compõem a sequência didática são organizados com nível de complexidade gradativo visando o aprofundamento da aprendizagem do educando em relação ao conteúdo abordado. Um ponto forte da sequência é que ela possibilita inserir as três etapas da prática reflexiva: o planejamento, a aplicação e a avaliação (ZABALA, 2010).

Concordamos com Lucas e Batista (2011), que fundamentados em Zabala (2010), assumem as seguintes características de uma sequência didática:

> I. Cada sequência é voltada para objetivos específicos;
> II. Elas esquematizam as variáveis da complexa prática educativa;
> III. Os tipos de atividade, sobretudo a maneira de articulá-las, são traços diferenciais e determinantes à especificidade da proposta didática;
> IV. Indicam-nos a função desempenhada por cada uma das atividades no processo de construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos;
> V. Avaliam a funcionalidade das atividades, sua ausência ou a ênfase que se lhes deve atribuir (2011, p. 251).

De acordo com Lucas (2010), o modo como as diferentes atividades podem ser organizadas é decisivo para o tipo de proposta didática que se deseja elaborar. Um dos parâmetros que possibilita identificar a forma de ensinar de cada docente é a maneira como as atividades são propostas.

Para Zabala (2010, p. 19) “uma vez determinadas as unidades didáticas como unidades preferenciais de análise da prática educativa, é preciso buscar suas dimensões para poder analisar as características diferenciais em cada uma das diversas maneiras de ensinar”. Assim, se o docente decide utilizar as sequências didáticas como instrumento prioritário para a investigação de sua prática,

---

[10] Há outros autores que discorrem a respeito de Sequência Didática, porém, nesta pesquisa, o termo será utilizado no sentido em que Zabala (2010) apresenta.

é necessário definir seus objetivos para refletir a respeito das características diferenciais em cada uma das inúmeras formas de ensinar.

Ao se desenvolver uma unidade didática, devemos refletir sobre as intenções educacionais que almejamos alcançar, ou seja, qual será o objetivo das atividades propostas nesta sequência.

Assim, é indispensável admitir que:

> [...] a identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a conformam e as relações que se estabelecem devem nos servir para compreender o valor educacional que têm, as razões que as justificam e a necessidade de introduzir mudanças ou atividades novas que as melhorem. Assim, pois, a pergunta que devemos nos fazer em primeiro lugar, é se esta sequência é mais ou menos apropriada e, por conseguinte, quais são os argumentos que nos permitem fazer esta avaliação?
> [...] o que podemos dizer dessa sequência além da constatação de sua complexidade? Vale a pena complicar tanto? Contribui para melhorar a aprendizagem dos alunos?
> [...] que avaliações podemos fazer desta sequência e que razões a justificam? (ZABALA, 2010, p. 54-55).

Seguramente, há diversos tipos de sequências didáticas que podem ser desenvolvidas e aplicadas no ensino, cada uma com seus objetivos específicos distintos. Porém, há aspectos comuns em grande parte dessas sequências, tais como: a) nível de participação dos discentes; b) o nível de mediação do professor; c) as diferentes atividades, visto que cada uma possui um papel didático diferente (LUCAS, 2010).

Para elaborar uma sequência didática rica em atividades diferenciadas para atingir objetivos distintos, explicaremos na próxima seção a respeito das tipologias de conteúdos a serem ensinados. São elas que definem os tipos de atividades existentes nas sequências.

3.1.1 Tipologia dos Conteúdos

Ao analisar uma sequência didática é necessário reconhecer a aprendizagem dos conteúdos segundo a tipologia proposta por Zabala (2010, p. 39):

a) Conteúdos Factuais
b) Conteúdos Conceituais

c) Conteúdos Procedimentais
d) Conteúdos Atitudinais

Os conteúdos factuais equivalem ao “conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos e singulares” (ZABALA, 2010, p. 41). Esses conteúdos são aqueles memorizados, assim como datas de acontecimentos históricos, nomes dos continentes de nosso planeta, localização de oceanos, fórmulas matemáticas, entre outros.

Os conteúdos factuais são internalizados pelo aprendiz quando este pode reproduzi-lo em sua forma literal, todavia a memorização do conteúdo não significa, necessariamente, a compreensão do mesmo. De acordo com Lucas (2010, p. 54), “as atividades utilizadas neste tipo de conhecimento baseiam-se em cópias por meio das quais os conteúdos são integrados às estruturas do conhecimento”.

Os conteúdos conceituais se referem “ao conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns” (ZABALA, 2010, p. 42). Nestes conteúdos, o aluno deverá ser capaz de identificar o objeto de estudo de acordo com suas definições, por exemplo, classificar formas geométricas, e para isso, deverá ter conhecimento do conceito de Geometria.

Conteúdo procedimental é “um conjunto de ações ordenadas com um fim, ou seja, dirigidas para a realização de um objetivo. São conteúdos procedimentais: ler, desenhar, calcular, observar, classificar, recortar, saltar, inferir, espetar, etc.” (ZABALA, 2010, p. 44). De acordo com o autor, para a realização de cada uma dessas ações, são necessárias habilidades particulares.

Por fim, os conteúdos atitudinais referem-se às atitudes que o aluno toma frente a uma situação-problema. Sendo assim, englobam vários conteúdos, que Zabala (2010) divide em três categorias diferentes e, ao mesmo tempo, integradas entre si:

- Grupo dos valores: são os princípios ou ideias que possibilitam a uma pessoa emitir suas concepções a respeito de condutas e seus sentidos. São exemplos de valores: “solidariedade, o respeito aos outros, a responsabilidade, a liberdade, etc.” (ZABALA, 2010, p. 46).

- Grupo das atitudes: é a maneira como cada indivíduo reage à situações de acordo com seus juízos de valores. Alguns exemplos: participar das atividades escolares, respeitar seus colegas de classe, entre outros.
- Grupos das normas: compreende as regras de comportamento a serem seguidas em determinadas situações e em diferentes grupos sociais; é a consciência do que pode ou não fazer em determinados grupos.

Como anunciado anteriormente o grupo dos valores, das atitudes e das normas são distintos, mas possuem relações entre si, e de acordo com Zabala (2010, p. 47), “cada um deles está configurado por componentes cognitivos (conhecimentos e crenças), afetivos (sentimentos e preferências) e condutuais (ações e declarações de intenção)”.

Após compreender quais são os tipos de conteúdo que compõem uma sequência didática, torna-se necessário saber avaliá-las. A próxima seção esclarecerá sobre este assunto.

3.1.1.1 Avaliação

De acordo com Zabala (2010), a avaliação é considerada por muitos professores, alunos e sociedade como um instrumento que serve para medir a aprendizagem do discente em relação ao conteúdo estudado. Porém, esse não é o real objetivo da avaliação que, por seu turno, vai além de quantificar os resultados alcançados pelos alunos.

No ensino e na avaliação praticada há milênios ainda predomina a ideia de que a avaliação – muitas vezes confundida com exame – é praticada apenas para medir o que o aluno sabe e identificar os melhores alunos e por consequência, selecionar aqueles que estão melhores preparados para dar continuidade a seus estudos e chegar à universidade.

No entanto, o objetivo da educação não é o de selecionar aqueles mais bem preparados para entrar em uma universidade, mas a “formação integral é a finalidade principal do ensino e, portanto, seu objetivo é o desenvolvimento de todas as capacidades da pessoa e não apenas as cognitivas” (ZABALA, 2010, p. 197).

Desta forma, ao pensar que a finalidade real do ensino não é apenas a preparação para a universidade nossos objetivos educacionais sofrem uma ampliação; muitas das nossas crenças em relação à avaliação se modificam e, por consequência, os conteúdos a serem ensinados não serão apenas aqueles cobrados no vestibular.

Zabala (2010, p. 197), defende que é relevante “levar em consideração os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais que promovam as capacidades motoras, de equilíbrio e de autonomia pessoal, de relação interpessoal e de inserção social”. Assim sendo, o docente deve oferecer aos seus educandos a oportunidade de desenvolver todas as suas capacidades.

Cada um de nossos alunos chega à escola com diferentes bagagens e histórias de vida, com experiências únicas de acordo com o ambiente sociocultural em que se desenvolveu e mantido por características singulares. Desta forma, a avaliação, denominada por Zabala (2010), como avaliação formativa é um processo composto por três fases: avaliação inicial, reguladora e final integradora.

A primeira fase da avaliação é denominada como avaliação inicial, se fundamenta em reconhecer o que cada estudante sabe, sabe fazer e como faz. Estes quesitos definem os tipos de atividades que devem ser cobradas pelo professor a fim de detectar tais aspectos, permitindo a construção de uma proposta pedagógica e de uma série de atividades que possibilite o desenvolvimento do educando.

Esta não é uma tarefa fácil, posto que por mais experiente que seja o educador, as atividades propostas são recebidas de maneira diferente por cada indivíduo já que suas experiências e histórias de vida são distintas. A partir dessa premissa, no plano de intervenção do professor “será necessário adequar as atividades às necessidades de cada aluno às diferentes variáveis educativas: as tarefas e as atividades, seu conteúdo, as formas de agrupamento, os tempos, etc” (ZABALA, 2010, p. 200). Desta forma, é imprescindível, no decorrer das atividades propostas, inserir novas tarefas que proponham desafios e auxílio direcionados.

É na avaliação reguladora que o docente perceberá como cada aluno aprende no decorrer do processo de ensino e de aprendizagem. Alguns educadores utilizam avaliação formativa para se referir a este tipo de avaliação.

Porém, Zabala (2010) opta por chamá-la de reguladora, acreditando que este termo esclarece de maneira mais satisfatória as características de adequação e adaptação.

Desta forma, é necessário analisar as atividades realizadas para apurar as condições, tanto da turma quanto de cada aluno, e tomar as medidas educacionais necessárias para o desenvolvimento dos alunos, respeitando sempre suas particularidades. Para tanto, é necessário averiguar frequentemente os resultados alcançados pelos alunos para balizar, tanto as atividades de ensino, quanto a aprendizagem dos alunos.

A avaliação final é realizada a fim de reconhecer os resultados obtidos e os conhecimentos que cada aluno construiu. Os termos avaliação somativa ou integradora são utilizados para compreender todo o trajeto educacional do aluno. Zabala (2010, p. 201), define a avaliação somativa ou integradora como

> [...] um informe global do processo que, a partir do conhecimento inicial (avaliação inicial), manifesta a trajetória seguida pelo aluno, as medidas específicas que foram tomadas, o resultado final de todo processo e, especificamente, a partir deste conhecimento, as previsões sobre o que é necessário continuar fazendo ou o que é necessário fazer de novo.

A real intenção da avaliação é o de aperfeiçoar a prática educativa e, a partir disso, fazer com o que os alunos alcancem o maior nível de competências, de acordo com suas capacidades. Para alcançarmos uma qualidade satisfatória do ensino, é necessário conhecer os processos de aprendizagens dos alunos e avaliar as intervenções pedagógicas de cada docente. Levando em conta esses dois aspectos, favorecemos o aperfeiçoamento de nosso desempenho em sala de aula.

Mas como se dá a avaliação dos diferentes tipos de conteúdo, avaliação dos conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais?

Cada conteúdo estudado tem seus objetivos educacionais a serem alcançados. Esses objetivos orientam o processo educativo e, consequentemente, a avaliação. Como já dito anteriormente, é necessário avaliar o que o aluno sabe e de que forma ele o sabe, mas como o professor pode avaliar esses saberes? Como avaliamos o nível de aprendizagem dos conteúdos segundo a sua tipologia?

Cada tipo de conteúdo possui uma forma particular de avaliação, desta maneira, iremos apresentar como avaliar os conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais.

Ao avaliar os conteúdos factuais, fica claro que o professor não almeja apenas a memorização da informação, mas que esta tenha um significado, que o aluno possua conhecimentos inerentes à informação e à articulação dela com diferentes contextos (ZABALA, 2010).

Para entender melhor o que o autor quis dizer, daremos um exemplo: ao indagar os estudantes sobre qual é a capital do Brasil, estes devem responder que é Brasília, mas alguns conceitos ligados a esta informação devem ser do conhecimento do estudante, deve saber o que significa ser a capital de um país, qual sua importância e qual é a sua localização geográfica. Estes conhecimentos que vão além da pergunta devem ser ativados assim que a cidade Brasília vem à mente do estudante. Como afirma Zabala (2010, p. 202):

> Uma aprendizagem significativa de fatos envolve sempre a associação dos fatos aos conceitos que permitem transformar este conhecimento em instrumento para a concepção e interpretação das situações ou fenômenos que explicam.

Se aceitarmos que o conhecimento dos fatos implica dominar também os conceitos ligados a ele (no exemplo que citamos: localização geográfica, conceito de capital, desenvolvimento histórico...), desejamos que estes conhecimentos sejam ativados sempre que necessário. Desta forma, as atividades coerentes para localizar este tipo de aprendizagem, são aquelas que fazem ligação entre fatos e conceitos.

Outro exemplo que Zabala (2010) nos proporciona em seu livro, é a seguinte situação: na literatura, os alunos são levados a lerem livros. Em uma sequência de atividades referente à interpretação do livro, o professor fará indagações a respeito do enredo, acontecimentos e também poderá fazer perguntas mais diretas a respeito de nomes de personagens ou ano de acontecimentos presentes na obra. Fica evidente que o estudante deverá dominar além dos fatos, os conceitos ligados a eles.

Quando há a necessidade de indagar sobre os fatos, a atividade mais adequada para fazer essa avaliação é uma simples pergunta. A agilidade e a objetividade do aluno em respondê-la, nos esclarece a respeito do que o aluno sabe e nos orienta a como ajudá-lo. Esta avaliação pode ser feita por meio de sequência de atividades, provas escritas, dinâmicas grupais ou avaliação oral (ZABALA, 2010).

Na maioria das vezes, identificar a aprendizagem dos conteúdos factuais é relativamente fácil, afinal de contas, ou o aluno sabe ou não sabe, ou ainda sabe em partes. Porém, identificar a aprendizagem de conteúdos conceituais não é uma tarefa tão fácil assim, pois é inapropriado dizer que a aprendizagem de um conteúdo conceitual está concluída. Zabala (2010, p. 204) afirma que teremos

> [...] que falar de graus ou níveis de profundidade e compreensão, algo que implica a necessidade de propor atividades em que os alunos possam demonstrar que entenderam, assim como sua capacidade para utilizar convenientemente os conceitos aprendidos.

Sempre haverá um aluno com um conhecimento mais profundo que o outro, desta forma, enfrentamos uma maior dificuldade em avaliar um conteúdo conceitual. O professor deve estabelecer qual é o grau de conhecimento a respeito de determinados conceitos e avaliar segundo estes objetivos.

Ao indagarmos um aluno sobre o conceito de algum conteúdo, é corriqueiro a repetição ou memorização dos conceitos explícitos no livro didático, sem que tenha havido uma real compreensão do assunto.

Desta forma, como é possível avaliar se o aluno realmente compreendeu um conteúdo conceitualmente? Quais são as atividades mais apropriadas para realizar esta avaliação? Zabala (2010, p. 205) nos esclarece que:

> As atividades que podem garantir um melhor conhecimento do que cada aluno compreende implicam *a observação do uso de cada um dos conceitos em diversas situações* e nos casos em que o menino ou a menina os utilizam em suas *explicações espontâneas* (grifos do autor).

Assim sendo, o método mais apropriado para avaliar conteúdos conceituais é a observação por meio de apresentações de trabalhos, discussões, trabalhos grupais ou outras atividades que instiguem o aluno a verbalizar a respeito do assunto. Porém, enfrentamos alguns percalços em nossa prática educativa. O número de alunos e o tempo disponível para a realização das tarefas nem sempre nos permitem aplicar as atividades citadas acima.

Segundo Zabala (2010), é possível também utilizar-se de provas escritas, mas devemos ter consciência de que este instrumento possui limitações e há a necessidade de formulá-la adequadamente a fim de minimizar estes efeitos. É preciso propor atividades que forcem os alunos a utilizar os conceitos aprendidos em situações diferenciadas. Uma outra maneira de identificar a aprendizagem de conceitos em uma prova escrita é solicitar que os alunos expliquem a respeito de um assunto utilizando argumentos e exemplos que não foram utilizados em sala de aula.

Nas Ciências Exatas como Matemática, Física e Química, os conteúdos conceituais são mais fáceis de avaliar em provas escritas por meio de situações problema diversificados. Mas é importante salientar que os mesmos não podem ter relação direta com aqueles já trabalhados em sala de aula, sendo necessário diversificar.

O estudante deve refletir a respeito do problema proposto e tentar encontrar estratégias de resolução. Situações problema similares aos trabalhados em classe privam o raciocínio do aluno, fazendo com que o mesmo os resolva sem ao menos compreender integralmente a situação em si. É importante proporcionar informações além das necessárias para resolver um problema, forçando a interpretação do aluno para solucionar aquela situação (ZABALA, 2010).

Os conteúdos factuais e conceituais podem ser expressos, como já citado, também por meio de provas escritas. Já os conteúdos procedimentais implicam em saber fazer, ou seja, são analisados em contextos de aplicação dos conteúdos factuais e conceituais. Zabala (2010, p. 207), nos explica que:

> Para aprender um conteúdo procedimental é necessário ter uma compreensão do que representa como processo, para que serve, quais são os passos ou fases que configuram, etc. O que define sua aprendizagem não é o conhecimento que se tem dele, mas o domínio ao transferi-lo para a prática.

Em suma, um conteúdo procedimental é saber aplicar alguns fatos e conceitos em situações adversas. Por exemplo, em um problema matemático, saber aplicar corretamente fórmulas e algoritmos em sua resolução.

Para realizar a avaliação de um conteúdo procedimental, podem ser utilizadas provas quando se refere a desenhos, escritas, aplicação de fórmulas, representações gráficas, classificação de informações, entre outros. Porém, na maioria das situações, utilizar-se de provas escritas não é o caminho. É mais prudente propor tarefas que obriguem os alunos a expor suas resoluções, fazendo com que os conteúdos procedimentais possam ser observáveis pelo docente. “Devem ser atividades abertas, feitas em aula, que permitam um trabalho de atenção por parte dos professores e a observação sistemática de como cada um dos alunos transfere o conteúdo para a prática” (ZABALA, 2010, p. 207).

Enfim, chegamos aos conteúdos atitudinais que são aqueles que se referem às atitudes do estudante frente a uma situação conflitante e, avaliar esses conteúdos é um trabalho mais complexo em relação aos demais. Zabala (2010, p. 209) informa que:

> A fonte de informação para conhecer os avanços nas aprendizagens de conteúdos atitudinais será a observação sistemática de opiniões e das atuações nas atividades grupais, nos debates das assembleias, nas manifestações dentro e fora da aula, nas visitas, passeios e excursões, na distribuição das tarefas e responsabilidades, durante o recreio, nas atividades esportivas, etc.

Desta forma, é necessário propor situações problemas que forcem os alunos a tomar decisões, e é partir daí, que o professor, por meio da observação, poderá avaliar seu comportamento.

4 DELINEAMENTO ESTRUTURAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 PERFIL DOS SUJEITOS DA PESQUISA

A Sequência Didática (SD) proposta nesta pesquisa foi aplicada em um Colégio situado em uma cidade da região Norte do Paraná aos alunos da 1ª série do Ensino Médio do turno matutino, no período de 11/05 à 05/06 do ano letivo de 2017.

A amostra compôs-se de 25 alunos – sendo 12 meninas e 13 meninos, cuja faixa etária está entre 14 e 15 anos – oriundos de três cidades distintas, sendo a própria cidade onde está localizado o Colégio eleito para a aplicação da SD e outras duas circunvizinhas. Apesar de 25 alunos terem participado da pesquisa, foram analisados aqueles que entregaram todas as atividades propostas, perfazendo um total de 22 estudantes - 10 meninas e 12 meninos.

Em geral, os alunos demonstraram interesse e afinco no desenvolvimento das atividades, tendo em vista que foram utilizados materiais e abordagens diferentes das apresentadas cotidianamente nas aulas de Matemática.

4.2 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A SD proposta em nossa pesquisa para os alunos da 1ª série do Ensino Médio visa apresentar o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas de curvatura positiva, e para tanto aborda os Postulados de Euclides e as discussões a respeito do quinto Postulado; o conceito de retas paralelas; apresenta as diferentes curvaturas de uma superficie e todo um desenvolvimento histórico que desencadeia nas Geometrias não Euclidianas, com foco na Geometria Esférica.

As atividades foram desenvolvidas de acordo com as orientações de Zabala (2010), cujo argumento é que uma SD que visa a aprendizagem efetiva dos envolvidos deve ser composta de conteúdos factuais (F), conceituais (C), procedimentais (P) e atitudinais (A). Informações mais detalhadas a respeito da tipologia dos conteúdos propostos pelo autor se encontram no capítulo 3 desta pesquisa.

Esses conteúdos permearam a SD produzida nesta pesquisa como pode-se observar no Quadro 4.

Quadro 4 – Tipologia dos conteúdos referente ao Encontro 1

Q	F	C	P	A		Q	F	C	P	A
At	X					**Q4c**		X		
Q1			X			**Q4d**		X		
Q1a			X			**Q4e**		X		
Q1b		X	X			**Q4f**		X		
Q1c		X				**Q5**		X		
Q1d		X				**Q6a**		X	X	
Q2a			X			**Q6b**			X	
Q2b		X				**Q6c**		X	X	
Q2c		X				**7At**	X		X	
Q3			X	X		**Q7a**		X		
Q4a		X				**Q7b**			X	
Q4b		X				**Q7c**		X		

Fonte: Os Autores (2017)

O Encontro 1 foi iniciado com uma pergunta factual (que não possui numeração) e no decorrer das atividades organizadas para este encontro, houve momentos de discussão que envolviam conteúdos atitudinais e conceituais. Após a Q7, foi desenvolvida uma atividade com conteúdos factuais e procedimentais.

No Encontro 2 foi proposto o estudo de um texto que revelava informações históricas importantes para o desenvolvimento da Geometria não Euclidiana. O estudo desse texto foi realizado por meio de um jogo de perguntas e respostas, com os alunos organizados em equipe. Nele estavam presentes questões de cunho factual e conceitual, como apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 – Tipologia dos conteúdos referentes ao Encontro 2

Q	F	C	P	A		Q	F	C	P	A
P1		X				**P10**	X			
P2		X				**P11**	X			
P3		X				**P12**		X		
P4		X				**P13**		X		
P5		X				**P14**		X		
P6		X				**P15**	X			
P7		X				**P16**		X		
P8	X					**P17**		X		
P9		X				**P18**	X			

Fonte: Os Autores (2017)

Como visto no Encontro 2, as questões presentes no questionário apresentavam conteúdos factuais e conceituais, além de trabalhar conteúdos atitudinais quando o aluno necessitava envolver-se no jogo para ajudar a sua equipe a encontrar as respostas corretas no texto e participar como aluno eleito para disputar o direito de resposta da pergunta da vez.

No Quadro 6 apresentamos as tipologias de cada questão referente ao Encontro 3.

Quadro 6 – Tipologia dos conteúdos referentes ao Encontro 3

Q	F	C	P	A		Q	F	C	P	A
Q1a		X				**Q4a**			X	
Q1b		X				**Q4b**			X	
Q1c		X				**Q4c**			X	
Q2a		X				**Q5**		X	X	X
Q2b		X				**Q6**		X		
Q2c		X				**Q6a**		X	X	
Q2d		X				**At**		X	X	X
Q2e		X				**Q7**		X		
Q2f		X				**Q8**		X		
Q3		X								

Fonte: Os Autores (2017)

Nesse encontro, após a Q6 houve um momento de troca de ideias envolvendo conteúdos procedimentais, atitudinais e conceituais.

O Quadro 7 apresenta a tipologia dos conteúdos presentes no Encontro 4.

Quadro 7 – Tipologia dos conteúdos referentes ao Encontro 4

Q	F	C	P	A		Q	F	C	P	A
At	X					**Q3d**			X	
Q1a		X	X			**Q4**		X	X	
Q1b			X			**Q5**		X	X	
Q1c			X			**Q6**		X	X	
Q2a		X	X			**Q7**		X	X	
Q3a			X			**Q8a**		X	X	
Q3b			X			**Q8b**		X	X	
Q3c			X							

Fonte: Os Autores (2017)

O quarto encontro foi iniciado com três perguntas (que não possuem numeração), cujo objetivo era retomar alguns conhecimentos adquiridos em aulas anteriores. Tais perguntas envolviam conteúdos factuais e procedimentais.

O Colégio foi eleito para a aplicação da SD por ser o local de atuação da professora pesquisadora e os encontros aconteceram em contraturno, das 14h às 15h40min sempre às quintas-feiras de cada semana. A avaliação final foi aplicada no período matutino, no horário das aulas de Matemática no dia 05/06. A aplicação teve um total de quatro encontros de duas horas-aula cada um, no período vespertino, com mais uma aula no período matutino para a aplicação das avaliações finais, totalizando nove horas-aula.

A SD passou pela análise intersubjetiva de três professores, sendo eles: um professor doutor atuante no Ensino Superior há 15 anos; uma professora doutora atuante no Ensino Superior há seis anos e uma professora especialista que atua na Educação Básica há 37 anos.

Os professores avaliaram a pertinência das atividades que compõem a SD com o conteúdo abordado, bem como com a utilização da abordagem histórico-epistemológica. Essas contribuições foram cruciais para o enriquecimento e adequação da sequência, o que possibilitou sua aplicação.

A seguir, apresentamos uma visão geral a respeito dos conteúdos cobrados em cada encontro.

- **Primeiro Encontro – Geometria Plana:** foram propostas atividades com os Potulados de Euclides, visto que foi a partir das discussões do quinto Postulado que desenvolveram-se novas Geometrias, denominadas Geometrias não Euclidianas, além de apresentar o conceito de retas paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana e aguçar a curiosidade dos alunos a respeito de uma nova Geometria por meio de uma breve atividade prática.
- **Segundo Encontro – O desenvolvimento de uma nova Geometria:** apresentamos um texto histórico referente ao desenvolvimento da Geometria não Euclidana, começando pelos Postulados de Euclides e alguns matemáticos que se envolveram na tentativa de provar o quinto Postulado como um Teorema. Contudo, todas essas tentativas de demonstração evidenciaram novas Geometrias, começando pela Gemetria Hiperbólica até chegar na Geometria Esférica.

A fim de estimular uma aprendizagem efetiva e proporcionar um maior interesse em compreender o texto histórico, propusemos 18 perguntas que foram respondidas no decorrer da dinâmica, bem como especificadas nas regras do jogo.

- **Terceiro Encontro – Geometria Esférica**: apresentamos os três tipos de curvaturas e a Geometria sendo: Geometria Plana aplicada na curvatura nula, a Geometria Hiperbólica em superfícies de curvatura negativa e a Geometria Esférica em superfícies de curvatura positiva. Com o auxílio de uma bola de isopor e elásticos, conceitos da Geometria Esférica foram apresentados, tais como: retas ilimitadas; inexistência de retas paralelas; circunferência máxima; geodésicas e elementos notáveis da superfície esférica.
- **Quarto encontro – Geometria esférica - área e volume: foi** abordada a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e a classificação em relação a seus ângulos e lados. Foram propostas atividades que exploraram a fórmula da área e volume da superfície esférica.

5 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O Produto Educacional apresentado nesta dissertação encontra-se disponível em <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Para maiores informações, entre em contato com Bruna de Souza Sene Barbosa. E-mail: bruna.barbosa02@hotmail.com.

Nesta seção, apresentamos na íntegra a sequência didática **Geometria não Euclidiana de Curvatura Positiva.**

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NO ENSINO MÉDIO

Em seis quadros (um para cada encontro e outros dois se referindo às avaliações) apresentamos as atividades da sequência didática, seus objetivos e comentários a respeito de cada questão elaborada para os encontros. A ideia é que esses comentários contribuam para uma melhor compreensão das atividades e avaliações desenvolvidas pelas pesquisadoras, facilitando a aplicação da SD pelos professores da Educação Básica que se interessarem pelo assunto.

Quadro 8 – Ficha explicativa para o primeiro encontro

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
E1, AT1	Na Geometria Plana, qual é a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo?	Essa questão envolve uma propriedade da Geometria Euclidiana e um dos pontos primordiais que a difere da Geometria não Euclidiana.
E1, Q1	Para responder a esta pergunta, vamos construir um triângulo equilátero seguindo o roteiro abaixo. Você precisará de régua, compasso e transferidor. a) Com o transferidor, meça cada ângulo e determine a soma dos ângulos internos deste triângulo. b) Dados os triângulos a seguir, determine a soma de seus ângulos internos. c) Os triângulos acima são iguais? O que você observou em relação aos ângulos e à soma dos ângulos internos dos triângulos dados? d) Será que é possível construir um triângulo que possua a soma de seus ângulos internos maior que 180°? Justifique.	Proposta com o objetivo de confirmar a resposta dada na primeira pergunta e para instigar o uso dos materias básicos para desenho geométrico euclidiano (régua, compasso e transferidor), bem como comprovar que a soma dos ângulos internos dos triângulos planos é sempre 180°, com esta atividade é possível ainda explorar brevemente a classificação dos triângulos de acordo com seus lados e ângulos.

NOTA EXPLICATIVA	Lembre-se que a Geometria Plana é desenvolvida em uma superfície plana, porém existem outros tipos de superfície.	A partir do quadro fazer com que os alunos reflitam que há outras superfícies diferentes da plana. Aqui, caberá ao professor mediar a discussão a respeito dessas outras superfícies.
E1, Q2	Verifique se a resposta que você colocou na pergunta "1. d" é sempre verdadeira em qualquer superfície. Para isso, faça o que se pede: ❖ Na bexiga que você recebeu, construa um triângulo qualquer. Encha a bexiga na medida que preferir. Com o transferidor flexível, meça cada ângulo interno deste triângulo e responda: **a)** Qual é a soma dos ângulos internos do seu triângulo? **b)** O que você observou entre a soma dos ângulos internos do triângulo que você construiu na questão 1 e do triângulo desenhado na bexiga? Momento de discussão... Socialize sua resposta com seus colegas. **c)** De acordo com o que você acabou de analisar, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é sempre igual a 180°? Justifique.	A fim de levá-los a refletir sobre outras possibilidades, propomos uma atividade prática cujo objetivo é o de aguçar a curiosidade de nossos estudantes e fazê-los entender que em uma superfície de curvatura positiva, a soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180°. O professor regente deverá orientar os alunos que tal soma está compreendida entre 180° e 540°, porém não pode assumir esses valores. Esta atividade é proposta, no primeiro encontro, apenas para deixá-los intrigados e aguçar sua curiosidade para um conhecimento que será construído a partir do segundo encontro. O transferidor flexível pode ser obtido por meio da cópia xerográfica do transferidor euclidiano utilizado pelos estudantes, ou seja, o transferidor flexível utilizado na aplicação desta Sequência Didática é de papel.
E1, TEXTO1	**Tudo começou com Euclides, um matemático que exerceu muita influência no ensino da Geometria Plana. Pouco se sabe a respeito de sua vida, segundo Gomes (2014), Euclides viveu por volta de 325 a.C. e 260 a.C. e ministrava aulas na Escola Platônica em Atenas.** **Euclides é autor de "Os Elementos", um compêndio composto de 13 livros, divididos entre Geometria Plana, Teoria dos Números e Geometria Espacial. O Livro I, apresenta 23 definições, 5 axiomas, os famosos 5 postulados e 48 teoremas.**	Inserimos um recorte histórico a respeito de Euclides e de sua obra "Os Elementos". Neste recorte, é crucial a leitura coletiva feita pelos alunos, seguido pela explicação do professor. Importante salientar que a obra é um compêndio dos conhecimentos matemáticos gregos já existentes até aquela época, ou seja, Euclides reuniu o que já era conhecido e distribuiu ao longo dos treze livros (KATZ, 2010).
E1, Q3	No texto acima há três palavras que não são muito utilizadas em nosso cotidiano: axioma, postulado e teorema. A fim de compreender melhor o texto, procure no dicionário o significado de:	A compreensão dessas três palavras é deveras importante para o entendimento do desenvolvimento da Geometria Esférica. O aluno pode

	Axioma; Postulado e Teorema.	pesquisar em seu dicionário ou em dispositivos móveis.
E1, AT2	O que podemos deduzir em relação aos Postulados e Axiomas?	Neste momento, espera-se que os estudantes realizem uma discussão e que concluam que axioma e postulado podem ser considerados sinônimos.
E1, Q4	Com base no que acabou de descobrir, classifique cada afirmação abaixo em Postulado ou Teorema: **a)** Podemos descrever um círculo possuindo qualquer centro e qualquer raio. **b)** Todos os ângulos retos possuem 90°. **c)** Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem as mesmas medidas. **d)** Existem pontos que pertencem a uma reta qualquer do espaço e outros que não pertencem a ela. **e)** Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. **f)** Se duas retas (r e s) em um plano são cortadas por outra reta c tal que os ângulos (α e β) de um mesmo lado de c somam um valor menor que 180°, então as retas r e s, quando prolongadas do lado dos ângulos α e β, irão se encontrar em algum ponto.	As questões de a até e são muito claras e espera-se que a maioria dos alunos respondam de maneira assertiva. Na Q4f (o quinto Postulado de Euclides), é esperado que os estudantes classifiquem-no como um teorema, visto que seu texto é de difícil compreensão, sendo necessário um esboço. O professor não deve intervir ainda e seguir para a atividade 5.
E1, Q5	No Livro I de “Os Elementos”, Euclides apresenta cinco Postulados, os quais estão elencados abaixo: I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo. IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (apud Bicudo).	Espera-se que os estudantes relacionem o quinto Postulado de Euclides com a Q4f e que uma discussão se inicie. É importante que o professor conduza o debate e explique aos seus alunos que a discussão em torno do quinto Postulado perdurou por mais de 2.000 anos, quando vários matemáticos o classificavam como um teorema por ser composto por um texto muito complexo. Porém, após várias tentativas, não foi possível prová-lo como um teorema.

	Em seu ponto de vista, os cinco Postulados de Euclides são realmente de fácil compreensão e não necessitam de demonstrações? Justifique.	
E1, Q6	Foram diversos os matemáticos que trabalharam durante mais de 2000 anos em busca da demonstração do quinto Postulado, a fim de certificar se aquele era realmente um Postulado ou se tratava de um Teorema. **a)** De acordo com sua interpretação, esboce o quinto Postulado de Euclides: **b)** Desenhe seu esboço no quadro de giz. Debate com a turma a respeito de algumas representações desenhadas no quadro de giz. **c)** Após a discussão com a turma, represente abaixo o esboço definitivo do quinto Postulado.	Solicitar o desenho do quinto postulado a cada aluno de acordo com sua interpretação, sem intervenção do professor. Sugere-se que os alunos de cada fila agrupem-se e decidam pelo desenho que melhor retrata o quinto postulado. Um representante exporá no quadro de giz o desenho do grupo e, logo após, a turma deverá entrar em um consenso e eleger a representação mais fiel. É de suma importância reforçar as informações que aparecem no enunciado das atividades a respeito das discussões que ocorreram por mais de dois mil anos em torno do quinto postulado, e que as impressões que os alunos tiveram foram a mesmas de muitos matemáticos, o que justifica toda essa discussão e a importância de propor as atividades dessa natureza, visto que elas embasarão a compreensão do motivo do desenvolvimento de novas geometrias.
E1, Q7	O quinto Postulado de Euclides, conhecido mais tarde como Postulado das Paralelas, também pode ser expresso por: Por um ponto fora de uma reta r há apenas uma reta paralela à reta r. Este substituto proposto pelo Matemático e Geólogo escocês John Playfar (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos. Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz o local que John Playfar nasceu? Agora, localize o local do nascimento de Euclides. **a)** Em sua opinião, porque John Playfar (1748-1819) criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides? **b)** Agora, levando em consideração o substituto de Playfar para o quinto Postulado, você seria capaz de fazer o esboço dele?	Espera-se que os estudantes percebam que este substituto foi proposto para facilitar a compreensão do quinto Postulado. Importante salientar que Euclides não mencionou retas paralelas neste Postulado, declarou apenas que se os ângulos (menores que 90°) formados por duas retas cortadas por uma tranversal se encontrarão em algum instante, então seria análogo pensar que se estes ângulos forem iguais a 90°, não se encontrarão em momento algum. Salientar que estes Postulados foram desenvolvidos visando sua aplicação em superfícies planas. Localizar o local onde Euclides e John Playfar nasceram, reforça aos alunos que matemáticos de diferentes

	c) Mas afinal, o que são mesmo retas paralelas?	localidades se envolveram nos desdobramentos do quinto postulado. Euclides nasceu em Alexandria, norte do Egito e John Playfair nasceu na Escócia.

Fonte: Os Autores (2017)

Apresentamos a seguir, uma ficha para cada encontro, cuja finalidade foi a de orientar o professor a respeito dos objetivos da aula, dos materiais a serem utilizados para o desenvolvimento das atividades, das estratégias e a possível avaliação a ser empregada.

Ao final de cada encontro, dispomos de uma atividade intitulada como “Refletindo um pouco” cujo objetivo foi o de fazer com que o aluno reflitasse a respeito do conteúdo que aprendeu no decorrer daquela aula e ao mesmo tempo, permitir com que o professor organizesse as aulas seguintes levando em consideração as facilidades e dificuldades que seus alunos externaram na ficha.

Quadro 09 – Orientações para o primeiro encontro

Título da Atividade	**Geometria Euclidiana**
Objetivos da aula	* Apresentar os cinco Postulados de Euclides e revelar as discussões ocorridas em torno do quinto Postulado; * Compreender o conceito de retas paralelas; * Determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana e na superfície de curvatura positiva.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* régua, compasso, transferidor rígido e outro flexível; * bexiga; * dicionário ou dispositivo móvel; * Mapa Múndi.
Estratégia	Será iniciada a aula com uma atividade diagnóstica a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo desenhado em uma superfície plana. Será solicitado para que os alunos construam, utilizando régua e compasso, um triângulo equilátero e obtenham, com o transferidor, a soma dos ângulos internos deste triângulo. Logo em seguida, outros dois triângulos serão apresentados para que o aluno, utilizando seu transferidor, determine a soma dos ângulos internos destes triângulos. Nestas atividades, o aluno confirmará que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a 180°. Além disso, o professor poderá verificar se o aluno é capaz de trabalhar com os materiais de desenho. Logo após, será solicitado que os alunos tracem um triângulo em uma bexiga e meçam seus ângulos internos para verificar que essa soma é maior que 180°. Será proporcionado um tempo para que os discentes possam discutir a respeito do que acabaram de descobrir. O aprofundamento deste assunto (triângulo traçado em uma superfície diferente da plana) se dará a partir do segundo encontro; a questão fica

	como uma atividade para despertar a curiosidade para novas aprendizagens. A seguir, será abordada a história de Euclides (~325-260 a. C.), discorrendo brevemente a respeito da obra "Os Elementos" e sobre os famosos cinco postulados. Após o texto, será solicitado que os alunos utilizem seu dicionário ou seu dispositivo móvel para procurar o significado das palavras "axioma, postulado e teorema" e espera-se que os mesmos cheguem à conclusão que axioma e postulado têm significados muito semelhantes, chegando a ser consideradas sinônimas[11]. Solicitaremos que cada aluno desenhe em seu material a sua interpretação do quinto postulado e após para alguns deles apresentá-las no quadro de giz; será proporcionado um momento de discussão para que seja possível chegar na representação mais próxima do correto. Por fim, apresentaremos o substituto do quinto postulado proposto por John Playfar.
Avaliação	A primeira pergunta da Sequência Didática tem caráter diagnóstica a fim de verificar se o aluno possui conhecimento prévio a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana. A avaliação se dará durante todo o processo da realização da sequência didática proposta. Em todos os encontros serão observados: * capacidade que o aluno possui em socializar os resultados obtidos com os demais colegas; * a persistência em alcançar os resultados mesmo diante de dificuldades; * o envolvimento do aluno para resolver as atividades propostas; * o comprometimento do aluno ao preencher avaliação de rotina entregue no final do encontro. As atividades e a avaliação deverão ser executadas pelos alunos a fim de nortear a prática do professor durante toda a aplicação da Sequências Didáticas favorecendo possíveis adequações no decorrer do processo. Neste primeiro encontro a avaliação terá caráter formativo, no entanto pode ser atribuída uma nota pela realização das atividades (o valor dessa nota fica a critério do professor), independentemente do aluno ter realizado adequadamente as atividades. Ao final das atividades será proposta uma atividade avaliativa "Refletindo um pouco", cujo objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação, de caráter formativo, para a qual o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

[11] "Salienta-se que as proposições admitidas sem demonstração são denominadas por axiomas ou postulados, e as demais, aquelas demonstradas, são ditas teoremas" (ZANELLA, 2013, p. 22).

Geometria Euclidiana

Na Geometria Plana, qual é a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo?

1. Para responder a esta pergunta, vamos construir um triângulo equilátero seguindo o roteiro abaixo. Você precisará de régua, compasso e transferidor.

1°) Trace um segmento de reta de 4 cm e marque os pontos extremos A e B;

2°) Pegue o compasso e com a ponta seca em A, abra até o ponto B e trace uma semicircunferência;

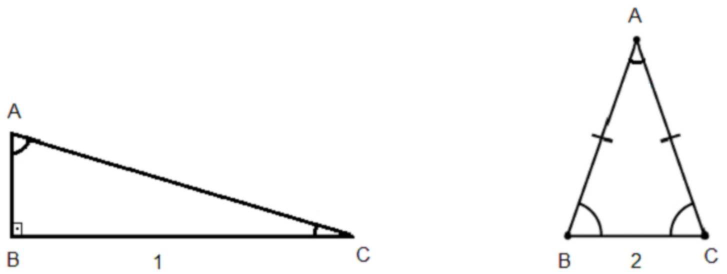
3°) Agora, com a mesma abertura e a ponta seca em B, faça uma outra semicircunferência que corta a primeira em C;

4°) Ligue os pontos.

a) Com o transferidor, meça cada ângulo e determine a soma dos ângulos internos deste triângulo.

b) Dados os triângulos a seguir, determine a soma de seus ângulos internos.

Figura 01 – Triângulos



Fonte: Adaptado de: http://www.estudarmatematica.pt/2014/02/triangulo-equilatero-isosceles-e.html (2014)

c) Os triângulos acima são iguais? O que você observou em relação aos ângulos e à soma dos ângulos internos dos triângulos dados?

d) Será que é possível construir um triângulo que possua a soma de seus ângulos internos maior que 180°? Justifique.

____

____

____

Lembre-se que a Geometria Plana é desenvolvida em uma superfície plana, porém existem outros tipos de superfície.

2. Verifique se a resposta que você colocou na pergunta “1. d” é sempre verdadeira em qualquer superfície. Para isso, faça o que se pede:

❖ Na bexiga que você recebeu, construa um triângulo qualquer. Encha a bexiga na medida que preferir. Com o transferidor flexível, meça cada ângulo interno deste triângulo e responda:

a) Qual é a soma dos ângulos internos do seu triângulo?

____

____

b) O que você observou entre a soma dos ângulos internos do triângulo que você construiu na questão 1 e do triângulo desenhado na bexiga?

____

____

Momento de discussão... Socialize sua resposta com seus colegas.

c) De acordo com o que você acabou de analisar, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é sempre igual a 180°? Justifique.

____

____

É muito provável que essas informações sejam novidade para você, certo?! Devem tê-lo deixado intrigado!!!

O que realizamos há pouco, foi a construção de um triângulo em uma superfície diferente da plana, na qual alguns conceitos e regras mudam. As proposições e teoremas aplicados na Geometria fundamentada na superfície plana não se aplicam em outras superfícies como a de curvatura positiva.

Bom, mas essas informações serão exploradas mais adiante.

O desenvolvimento de uma nova Geometria deve-se ao estudo e observações de muitos matemáticos da antiguidade. Isso é uma longa história iniciada por Euclides de Alexandria (III a.C.). Vamos conhecer essa história desde o início?!

Como tudo começou...

Tudo começou com Euclides, um matemático que exerceu muita influência no ensino da Geometria Plana. Pouco se sabe a respeito de sua vida, segundo Gomes (2014), Euclides viveu por volta de 325 a.C. e 260 a.C. e ministrava aulas na Escola Platônica em Atenas.

Euclides é autor de "Os Elementos", um compêndio composto de 13 livros, divididos entre Geometria Plana, Teoria dos Números e Geometria Espacial. O Livro I, apresenta 23 definições, 5 axiomas, os famosos 5 postulados e 48 teoremas.

3. No texto acima há três palavras que não são muito utilizadas em nosso cotidiano: axioma, postulado e teorema. A fim de compreender melhor o texto, procure no dicionário o significado de:

Axioma:

____

____

Postulado:

____

____

Teorema:

____

____

O que podemos deduzir em relação a Postulados e Axiomas?

Fonte: http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto

4. Com base no que acabou de descobrir, classifique cada afirmação abaixo em Postulado ou Teorema:

a) Podemos descrever um círculo possuindo qualquer centro e qualquer raio: ____________________

b) Todos os ângulos retos possuem 90°: ____________________

c) Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem as mesmas medidas: ____________________

d) Existem pontos que pertencem a uma reta qualquer do espaço e outros que não pertencem a ela: ____________________

e) Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa: ____________________

f) Se duas retas (r e s) em um plano são cortadas por outra reta c tal que os ângulos (α e β) de um mesmo lado de c somam um valor menor que 180°, então as retas r e s, quando prolongadas do lado dos ângulos α e β, irão se encontrar em algum ponto: ____________________

5. No Livro I de “Os Elementos”, Euclides apresenta cinco Postulados, os quais estão elencados abaixo:

VI. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

VII. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

VIII. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

IX. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

X. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos,

> sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 8).

Sob seu ponto de vista, os cinco Postulados de Euclides são realmente de fácil compreensão e não necessitam de demonstrações? Justifique.

6. Foram diversos os matemáticos que trabalharam durante mais de 2000 anos em busca da demonstração do quinto Postulado, a fim de certificar se aquele era realmente um Postulado ou se tratava de um Teorema.

a) De acordo com sua interpretação, demonstre o quinto Postulado de Euclides:

b) Desenhe sua demonstração no quadro de giz.

[12] Debate com a turma a respeito de algumas demonstrações desenhadas no quadro de giz.

c) Após a discussão com a turma, represente abaixo a demonstração definitiva do quinto Postulado.

7. O quinto Postulado de Euclides, conhecido mais tarde como Postulado das Paralelas, também pode ser expresso “Por um ponto fora de uma reta r há

[12] **Fonte:** https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Imagem-vetorial-de-bal%C3%A3o-lados-esquerdo/16342.html

apenas uma reta paralela à reta r”. Este substituto proposto pelo Matemático e Geólogo escocês John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos.

Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz o local que John Playfair nasceu? Agora, localize o local do nascimento de Euclides.

a) Em sua opinião, porque John Playfair (1748-1819) criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides?

____

____

b) Agora, levando em consideração o substituto de Playfair para o quinto Postulado, você seria capaz de fazer o esboço dele?

[13]Prontinho, você construiu duas retas paralelas. Parabéns!!! 

c) Mas afinal, o que são mesmo retas paralelas?

____

____

Todas as aulas contam com uma ficha avaliativa proposta ao término da aula, como apresentado mais detalhadamente no Quadro 10.

[13] **Fonte:** https://www.emojistickers.com/products/party-popper

Quadro 10 – Ficha explicativa “Refletindo um pouco”

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
REFLETINDO UM POUCO		
E1,E2,E3,E4 Q1	O que você aprendeu hoje?	O objetivo deste questionário, entregue ao final de cada encontro, é fazer com que os alunos revelem suas facilidades, dificuldades e que o façam refletir a respeito do encontro realizado, se foi produtivo, o que chamou mais atenção e o que pode ser melhorado. Tal questionário auxilia o professor na adaptação, encontro por encontro, das atividades em uma próxima aplicação.
E1,E2,E3,E4 Q2	Quais foram as facilidades que você apresentou hoje?	
E1,E2,E3,E4 Q3	Quais foram as dificuldades que você apresentou neste encontro?	
E1,E2,E3,E4 Q4	Síntese Reflexiva	

Fonte: Os Autores (2017)

<u>REFLETINDO UM POUCO</u>

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu hoje?

____

____

____

2. Quais foram as facilidades que você apresentou hoje?

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você apresentou neste encontro?

____

____

____

5. Síntese reflexiva.

____

____

____

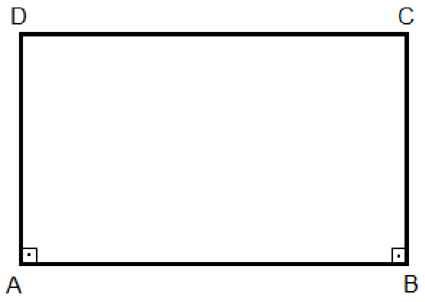
No segundo encontro propôs-se um jogo como estratégia para acesso às informações do contexto histórico relativos ao tema tratado, os quais são de extrema importância para a aprendizagem do conhecimento matemático trabalhado segundo uma abordagem histórico-epistemológica.

Quadro 11 – Ficha explicativa para o segundo encontro

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
E2, JOGO	**Regras do Jogo – O desenvolvimento de uma nova Geometria** • Dividir a classe em duas equipes, cada qual em um lado da sala de aula; • Entre as equipes, no centro da sala de aula, coloque a campainha de mesa sobre uma carteira; • O/A professor(a) será responsável por realizar as perguntas e anotar a pontuação de cada equipe no quadro de giz; • Em cada extremo da carteira, ficará um componente de cada equipe que deverá responder à pergunta da vez; • Todos os alunos são obrigados a participar como titular pelo menos uma vez; • O aluno eleito para responder à pergunta da rodada, deverá ter uma de suas mãos para trás e a outra sobre sua orelha; • Aleatoriamente, o professor pega um cartão da caixa e faz a pergunta; • O primeiro a apertar a campainha de mesa tem a chance de consultar o texto e responder à pergunta em até 30 segundos, sem a ajuda da equipe (lembrando que nesse momento todos os alunos podem consultar o texto em busca da resposta); • Caso o aluno não consiga responder no tempo definido, a equipe poderá ajudá-lo em até 10 segundos; • Se a resposta estiver incorreta, a outra equipe tem a chance de responder, respeitando o mesmo tempo dado à primeira equipe; • Se a segunda equipe também responder incorretamente ou ultrapassar o tempo estipulado, a equipe adversária pontua, devendo o cartão pergunta ser devolvido na caixa; • Pontua aquele que responder corretamente dentro do prazo estipulado; • O jogador que acertar a resposta tem o direito de	Propor um jogo de perguntas e respostas a fim de estimular uma aprendizagem efetiva em nossos alunos e proporcionar um maior interesse em compreender o texto histórico a respeito do desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas. Sugere-se que as perguntas formuladas para a realização do jogo sejam recortadas e coladas em papel cartão de modo que facilite a manipulação das mesmas.

	pintar o rosto de seu adversário com tinta guache; • Vence a equipe que somar mais pontos; • Cada aluno da equipe vencedora receberá um bombom e os da outra equipe, uma bala. **Materiais necessários** • Caixa para armazenamento dos cartões; • Bombons e balas; • Campainha de mesa; • Tinta guache; • Cronômetro; • Cartões contendo as perguntas.	
E2, TEXTO	**O Desenvolvimento de uma Nova Geometria** Vimos na aula passada que Euclides de Alexandria (~325 a. C. a 260 a. C.) foi o autor de um compêndio intitulado "Os Elementos", composto de 13 livros. No Livro I há tópicos referentes à Geometria Plana e o polêmico quinto Postulado, conhecido também como Postulado das Paralelas, podendo ser expresso por: "Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta" (EVES, 2011 p. 539). Este substituto proposto pelo matemático John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos por ser de fácil compreensão. A discussão a respeito do quinto Postulado é muito antiga, Ptolomeu I (século II) já tentava demonstrá-lo como um teorema, assim como Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Carl Frederich Gauss (1777 - 1855), János Bolyai (1802 - 1860) e Nikolai Lobachevsky (1793 - 1856). De acordo com Eves (2011), Girolamo Saccheri foi um jesuíta nascido em São Remo na Itália autor da primeira publicação póstuma "*Euclides Livre de Toda Imperfeição*", em 1773, de um estudo verdadeiramente científico a respeito do quinto postulado de Euclides. Nesta obra, Saccheri admite as 28 proposições de Euclides e a partir disso realiza o estudo do quadrilátero demonstrado na Figura 1 abaixo:	O objetivo do texto é apresentar, a partir da negação do quinto postulado de Euclides, o desenvolvimento de uma nova Geometria denominada Geometria não Euclidiana. O texto poderá ser lido em voz alta pelos alunos, atribuindo um parágrafo para cada estudante. Salientar que para ter sucesso no jogo, é necessário prestar atenção na leitura. Se achar necessário, após a leitura pedir para que os alunos façam um resumo coletivo, oralmente, daquilo que compreenderam do texto.

Figura 1 - Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Adaptado de Gomes (2014)

No quadrilátero de Saccheri, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos retos e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. O trabalho rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado, uma delas seria que duas retas paralelas não são equidistantes, entre outras afirmações (Carmo, 1987).

Resgatando o trabalho de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também iniciou seus estudos na tentativa de contradizer o quinto postulado obtendo resultados estranhos, porém sem conseguir negar o postulado das paralelas.

Toda essa mobilização em torno do quinto postulado (É postulado ou teorema? É possível negá-lo ou não?), proporcionou vestígios de uma nova Geometria, denominada de Geometria não Euclidiana.

O matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) já possuía conhecimento desta nova Geometria, pois estudava o postulado das paralelas e, em 1824, chegou à conclusão que não seria possível demonstrá-lo como um teorema e que uma nova Geometria poderia ser desenvolvida por meio desta dedução (Boyer, 2012). Gauss optou por não tornar público suas conclusões por receio da não aceitação de uma Geometria diferente da Euclidiana, considerada na época como verdade absoluta.
Poucos anos mais tarde, quase que simultaneamente, sem o conhecimento das pesquisas um do outro, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky chegam às mesmas conclusões que Gauss já havia chegado em 1824 (Carmo, 1987). O primeiro, um matemático húngaro nascido em Kolozsvár, publicou suas conclusões em 1832 como apêndice de um livro de matemática de seu pai Farkas Bolyai.

Lobachevsky, um matemático russo nascido em Nizhny Novgorod, já havia publicado suas conclusões em 1829, no entanto, devido à falta de agilidade com que as novas informações se propagavam e devido aos obstáculos linguísticos, sua pesquisa permaneceu desprezada por anos.

Segundo Boyer (2012), devido ao fato dessa nova Geometria fugir do senso comum, o próprio

	Lobachevsky a chamou de “Geometria imaginária”. Em 1829 publicou seu artigo intitulado *“Sobre os Princípios da Geometria”*, determinando oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana, mais especificamente da Geometria Hiperbólica (de curvatura negativa). Neste documento, o matemático russo exibe uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides, a saber: por um ponto C fora de uma reta AB podem ser traçadas mais de uma reta no plano paralela a AB (BOYER, 2012). Após o surgimento da Geometria Hiperbólica, era natural que se pensasse na existência de outra nova Geometria (Coutinho, 2001), foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica. Filho de um pastor, nascido em Hanover na Alemanha, era tímido e tinha saúde debilitada. Possuía uma razoável condição financeira e seu pai foi seu educador até os 10 anos de idade. Estudou nas Universidades de Göttingen e de Berlim. Em 1849, Riemman concluiu seu doutorado na Universidade de Göttingen com uma tese extraordinária introduzindo as Superfícies de Riemann (Eves, 2011). Em 1854 Riemann foi aceito pela Universidade de Gottingen como professor oficial não remunerado e para isso apresentou um artigo que contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física, pois apresentava possibilidades de novas geometrias e novos espaços. Conhecido como Postulado de Riemann, quaisquer duas retas (paralelas ou não) contidas em uma superfície curva se encontram em mais de um ponto (Coutinho, 2001). A partir deste momento, propiciou-se o desenvolvimento da Geometria Esférica. A Geometria Esférica é aquela aplicada em uma Superfície de Curvatura Positiva (Superfície Esférica). Esta Geometria possui definições diferentes das já estudadas por você, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um <u>triângulo plano</u> é igual a 180°, mas a soma dos ângulos internos de <u>um triângulo esférico</u> está entre 180° e 540°, sem assumir estes valores.	
E2, AT3	Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz os locais de nascimento dos estudiosos que tentaram demonstrar o quinto Postulado de Euclides como um teorema? São eles: Ptolomeu I; Girolamo Saccheri; Johann Heinrich Lambert; Carl Frederich Gauss; János Bolyai; Nikolai Lobachevsky.	Localizar o local de nascimento dos estudiosos que tentaram demonstrar o quinto postulado como um teorema é interessante para reforçar o impacto que tal postulado gerou na Geometria Plana. Alguns matemáticos que

		se envolveram nessas discussões (em diferentes épocas) estão elencadas no texto e os locais de nascimento são: Ptolomeu I: Egito; Saccheri: Itália; Lambert: Suíça; Gauss: Alemanha; Bolyai: Hungria; Lobachevsky: Rússia (ZANELLA, 2013).
E2, P1	Dentre os cinco postulados de Euclides, qual foi aquele que causou mais polêmica? Por quê?	As perguntas que fazem parte deste jogo têm por objetivo construir o conhecimento a respeito das novas Geometrias. Sugere-se propor questões essenciais para a compreensão do conhecimento, inserimos indagações a respeito de datas dos acontecimentos, nomes dos estudiosos mais influentes para este conteúdo, e formular perguntas com respostas explícitas ou implícitas no texto, necessitando de um certo grau de interpretação.
E2, P2	Por que John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides?	
E2, P3	John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides. O que dizia esse substituto?	
E2, P4	Em 1829 foi determinado oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana. Qual era o nome desta Geometria e em que tipo de curvatura ela se aplica?	
E2, P5	Lobachevsky exibiu uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides. Qual era essa hipótese?	
E2, P6	Qual era a intenção de Girolamo Saccheri quando iniciou seus estudos no intitulado “Quadrilátero de Saccheri”?	
E2, P7	O trabalho de Girolamo Saccheri rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado. Uma dessa proposições é que...	
E2, P8	Após os trabalhos de Saccheri, um suíço também iniciou estudos a fim de contradizer o quinto Postulado, porém não conseguiu atingir seu objetivo. Qual era o nome desse suíço nascido em 1728?	
E2, P9	Foi possível demonstrar o quinto Postulado como um Teorema?	
E2, P10	Qual foi um dos primeiros estudiosos a se prontificar a demonstrar o quinto Postulado? Em qual século isso ocorreu?	
E2, P11	As tentativas de Saccheri e Lambert de demonstrar o quinto Postulado, trouxe indícios de uma novo Geometria, denominada como ...	
E2, P12	A Geometria Esférica é aplicada em superfícies que possuem que tipo de curvatura?	
E2, P13	Dois matemáticos (Bolyai e Lobachevsky) desenvolveram uma nova Geometria em épocas bem diferentes. Por que eles não conheciam as pesquisas um do outro?	
E2, P14	Por que o matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) decidiu não publicar suas conclusões a respeito da demonstração do quinto Postulado de Euclides?	
E2, P15	Quem foi o estudioso que desenvolveu a Geometria Esférica?	
E2, P16	Na Geometria Esférica, o que diz o Postulado de Riemman?	

E2, P17	A Geometria de Euclides é aplicada em superfícies Planas. E a Geometria Esférica é aplicada em qual superfície?	
E2, P18	A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está compreendida entre ...	

Fonte: Os Autores (2017)

Orientações para o segundo encontro e, em seguida, as atividades.

Quadro 12 – Orientações para o segundo encontro

Título da Atividade	Jogo: **O desenvolvimento de uma Nova Geometria**
Objetivos do Jogo	* Mostrar o desenvolvimento de uma nova Geometria denominada Geometria não Euclidiana; * Relacionar a Geometria Hiperbólica e Esférica com a Geometria Euclidiana, a partir da negação do quinto postulado de Euclides; * Relacionar a Geometria Esférica com a negação da existência de retas paralelas.
Duração	2h/a
Materiais necessários	* Mapa Múndi *Caixa para armazenamento dos cartões; * Bombons e balas; * Campainha de mesa; * Tinta guache; * Cronômetro; * Cartões contendo as perguntas.
Estratégia	Para a realização do jogo, é importante realizar coletivamente a leitura do texto “O desenvolvimento de uma nova Geometria”; O docente fará a leitura das regras do jogo para seus alunos; O professor deverá ter em mão as regras do jogo, as perguntas e suas respectivas respostas; Fica a critério utilizar tinta guache, campainha de mesa e/ou prêmios no final do jogo para a equipe vencedora.
Avaliação	Neste encontro a avaliação terá caráter formativo, com valor a ser determinado pelo professor, atribuídos aos alunos que se envolverem no jogo proposto, participando de todas as etapas ativamente. Também será avaliado o comprometimento do aluno ao preencher a atividade “Refletindo um pouco”, entregue no final do encontro. Cujo objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação será de caráter formativo, e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Regras do Jogo – O desenvolvimento de uma nova Geometria

- Dividir a classe em duas equipes, cada qual em um lado da sala de aula;
- Entre as equipes, no centro da sala de aula, colocar a campainha de mesa sobre uma carteira;

- O/A professor(a) será responsável por realizar as perguntas e anotar a pontuação de cada equipe no quadro de giz;
- Em cada extremo da carteira, ficará um componente de cada equipe que deverá responder à pergunta da vez;
- Todos os alunos são obrigados a participar como titular pelo menos uma vez;
- O aluno eleito para responder a pergunta da rodada, deverá ter uma de suas mãos para trás e a outra sobre sua orelha;
- Aleatoriamente, o professor pega um cartão da caixa e faz a pergunta;
- O primeiro a apertar a campainha de mesa tem a chance de consultar o texto e responder à pergunta em até 30 segundos, sem a ajuda da equipe (lembrando que nesse momento todos os alunos podem consultar o texto em busca da resposta);
- Caso o aluno não consiga responder no tempo definido, a equipe poderá ajudá-lo em até 10 segundos;
- Se a resposta estiver incorreta, a outra equipe tem a chance de responder, respeitando o mesmo tempo dado à primeira equipe;
- Se a segunda equipe também responder incorretamente ou ultrapassar o tempo estipulado, a equipe adversária pontua, devendo o cartão pergunta ser devolvido na caixa;
- Pontua aquele que responder corretamente dentro do prazo estipulado;
- O jogador que acertar a resposta tem o direito de pintar o rosto de seu adversário com tinta guache;
- Vence a equipe que somar mais pontos;
- Cada aluno da equipe vencedora receberá um bombom e os da outra equipe, uma bala.

Materiais necessários

- Caixa para armazenamento dos cartões;
- Bombons e balas;
- Campainha de mesa;
- Tinta guache;
- Cronômetro;
- Cartões contendo as Perguntas.

O Desenvolvimento de uma Nova Geometria

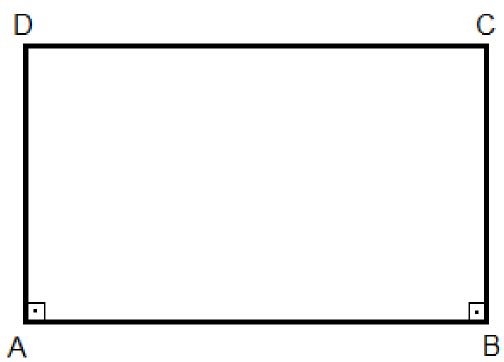
Vimos na aula passada que Euclides de Alexandria (~325 a. C. a 260 a. C.) foi o autor de um compêndio intitulado “Os Elementos”, composto de 13 livros. No Livro I há tópicos referentes à Geometria Plana e o polêmico quinto Postulado, conhecido também como Postulado das Paralelas, podendo ser expresso por: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta” (EVES, 2011 p. 539). Este substituto proposto pelo matemático John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos por ser de fácil compreensão.

A discussão a respeito do quinto Postulado é muito antiga, Ptolomeu I (século II) já tentava demonstrá-lo como um teorema, assim como Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Carl Frederich Gauss (1777 - 1855), János Bolyai (1802 - 1860) e Nikolai Lobachevsky (1793 - 1856).

De acordo com Eves (2011), Girolamo Saccheri foi um jesuíta nascido em São Remo na Itália autor da primeira publicação póstuma “*Euclides Livre de Toda Imperfeição”*, em 1773, de um estudo verdadeiramente científico a respeito do quinto postulado de Euclides.

Nesta obra, Saccheri admite as 28 proposições de Euclides e a partir disso realiza o estudo do quadrilátero demonstrado na Figura 1 abaixo:

Figura 1 - Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Adaptado de Gomes (2014)

No quadrilátero de Saccheri, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos retos e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. O trabalho rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado, uma delas seria que duas retas paralelas não são equidistantes, entre outras afirmações (CARMO, 1987).

Resgatando o trabalho de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também iniciou seus estudos na tentativa de contradizer o quinto postulado obtendo resultados estranhos, porém sem conseguir negar o postulado das paralelas.

Toda essa mobilização em torno do quinto postulado (É postulado ou teorema? É possível negá-lo ou não?), proporcionou vestígios de uma nova Geometria, denominada de Geometria não Euclidiana.

O matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) já possuía conhecimento desta nova Geometria, pois estudava o postulado das paralelas e, em 1824, chegou à conclusão que não seria possível demonstrá-lo como um teorema e que uma nova Geometria poderia ser desenvolvida por meio desta dedução (BOYER, 2012). Gauss optou por não tornar público suas conclusões por receio da não aceitação de uma Geometria diferente da Euclidiana, considerada na época como verdade absoluta.

Poucos anos mais tarde, quase que simultaneamente, sem o conhecimento das pesquisas um do outro, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky chegam às mesmas conclusões que Gauss já havia chegado em 1824 (CARMO, 1987). O primeiro, um matemático húngaro nascido em Kolozsvár, publicou suas conclusões em 1832 como apêndice de um livro de matemática de seu pai Farkas Bolyai.

Lobachevsky, um matemático russo nascido em Nizhny Novgorod, já havia publicado suas conclusões em 1829, no entanto, devido à falta de agilidade com que as novas informações se propagavam e devido aos obstáculos linguísticos, sua pesquisa permaneceu desprezada por anos.

Segundo Boyer (2012), devido ao fato dessa nova Geometria fugir do senso comum, o próprio Lobachevsky a chamou de “Geometria imaginária”. Em 1829 publicou seu artigo intitulado *“Sobre os Princípios da Geometria”*, determinando oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana, mais especificamente da Geometria Hiperbólica (de curvatura negativa).

Neste documento, o matemático russo exibe uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides, a saber: por um ponto C fora de uma reta AB podem ser traçadas mais de uma reta no plano paralela a AB (BOYER, 2012).

Após o surgimento da Geometria Hiperbólica, era natural que se pensasse na existência de outra nova Geometria (COUTINHO, 2001), foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica.

Filho de um pastor, nascido em Hanover na Alemanha, era tímido e tinha saúde debilitada. Possuía uma razoável condição financeira e seu pai foi seu educador até os 10 anos de idade. Estudou nas Universidades de Göttingen e de Berlim. Em 1849, Riemman concluiu seu doutorado na Universidade de Göttingen com uma tese extraordinária introduzindo as Superfícies de Riemann (EVES, 2011).

Em 1854 Riemann foi aceito pela Universidade de Gottingen como professor oficial não remunerado e para isso apresentou um artigo que contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física, pois apresentava possibilidades de novas geometrias e novos espaços.

Conhecido como Postulado de Riemann, quaisquer duas retas (paralelas ou não) contidas em uma superfície curva se encontram em mais de um ponto (COUTINHO, 2001). A partir deste momento, propiciou-se o desenvolvimento da Geometria Esférica.

A Geometria Esférica é aquela aplicada em uma Superfície de Curvatura Positiva (Superfície Esférica). Esta Geometria possui definições diferentes das já estudadas por você, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a 180°, mas a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está entre 180° e 540°, sem assumir estes valores.

Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz os locais de nascimento dos estudiosos que tentaram demonstrar o quinto Postulado de Euclides como um teorema? São eles: Ptolomeu I; Girolamo Saccheri; Johann Heinrich Lambert; Carl Frederich Gauss; János Bolyai; Nikolai Lobachevsky.

Cartões contendo as perguntas (para recortar e colar no papel cartão)

Dentre os cinco postulados de Euclides, qual foi aquele que causou mais polêmica? Por quê?	Por que John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides?	John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides. O que dizia esse substituto?
Em 1829 foi determinado oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana. Qual era o nome desta Geometria e em que tipo de curvatura ela se aplica?	Lobachevsky exibiu uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides. Qual era essa hipótese?	Qual era a intenção de Girolamo Saccheri quando iniciou seus estudos no intitulado “Quadrilátero de Saccheri”?
O trabalho de Girolamo Saccheri rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado. Uma dessa proposições é que...	Após os trabalhos de Saccheri, um suíço também iniciou estudos a fim de contradizer o quinto Postulado, porém não conseguiu atingir seu objetivo. Qual era o nome desse suíço nascido em 1728?	Foi possível demonstrar o quinto Postulado como um Teorema?
Qual foi um dos primeiros estudiosos a se prontificar a demonstrar o quinto Postulado? Em qual século isso ocorreu?	As tentativas de Saccheri e Lambert de demonstrar o quinto Postulado, trouxe indícios de uma nova Geometria, denominada como ...	A Geometria Esférica é aplicada em superfícies que possuem que tipo de curvatura?
Dois matemáticos (Bolyai e Lobachevsky) desenvolveram uma nova Geometria em épocas bem diferentes. Porque eles não conheciam as pesquisas um do outro?	Porque o matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) decidiu não publicar suas conclusões a respeito da demonstração do quinto Postulado de Euclides?	Quem foi o estudioso que desenvolveu a Geometria Esférica?
Na Geometria Esférica, o que diz o Postulado de Riemman?	A Geometria de Euclides é aplicada em superfícies Planas. E a Geometria Esférica é aplicada em qual superfície?	A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está compreendida entre ...

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu hoje?

____

____

____

2. Quais foram as facilidades que você apresentou hoje?

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você apresentou neste encontro?

____

____

____

5. Síntese reflexiva.

____

____

____

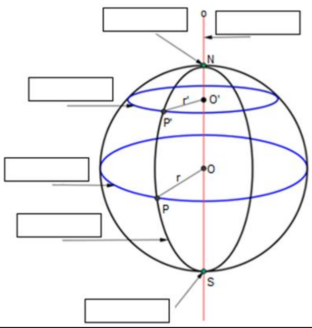
No terceiro encontro conceitos e nomenclaturas específicas da Geometria Esférica foram introduzidos.

Quadro 13 – Ficha explicativa para o terceiro encontro

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
E3, TEXTO1	*O quinto Postulado de Euclides (~325 – 260 a. C.) deu muito o que falar; vários matemáticos tentaram demonstrar o postulado como um teorema. Dentre os célebres matemáticos que tentaram essa demonstração, destacamos Proclus (410-485), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Gauss (1777 – 1855), Bolyai (1802 – 1860), Lochevsky (1793 – 1856), entre outros. Foi possível perceber que a tentativa de demonstrar o quinto postulado perdurou por muitos anos. O quinto postulado de Euclides era válido para a geometria plana, mas se considerássemos superfícies com diferentes curvaturas, outros conceitos deveriam ser formados. As tentativas de demonstrar esse quinto postulado proporcionaram vestígios de novas Geometrias, conhecidas como Geometrias não Euclidianas.*	Iniciar o encontro com um texto histórico a fim de retomar as discussões em torno do quinto postulado e evidenciar que se tal postulado não era válido em superfícies diferentes da plana. Apresentar a palavra curvatura pela primeira vez, conceito este, importante no estudo das Geometrias não Euclidianas.
AT1	Mas espere aí!! Curvatura... Essa palavra não é estranha! Mas o que significa? O que você entende por curvatura? Discussão da turma.	A ideia é que os próprios alunos exponham o que entendem por curvatura, o papel do professor aqui é o de orientar, se necessário, para que a discussão não saia do foco.
NOTA EXPLICATIVA	Como eu estava dizendo há diversos objetos com diferentes curvaturas, como por exemplo: ❖ O apoio de madeira da sua carteira tem curvatura nula; ❖ Uma bola de futebol tem curvatura positiva; ❖ Uma corneta tem curvatura negativa.	Nesta chamada, é apresentado um exemplo de cada curvatura abordada durante o encontro. O professor pode solicitar que os alunos deem outros exemplos de cada curvatura a fim de certificar se houve a compreensão do conteúdo.
E3, Q1	De acordo com os exemplos citados, defina com suas palavras: **a)** curvatura nula: **b)** curvatura positiva: **c)** curvatura negativa:	O objetivo da questão é fazer com que os alunos reflitam a respeito de um conceito com base apenas nos exemplos citados anteriormente.
E3, Q2	Classifique cada objeto abaixo em curvatura nula, positiva ou negativa:	A questão objetiva verificar se houve a compreensão das diferentes curvaturas apresentadas em várias

	a) lado côncavo de uma colher; **b)** lado convexo de uma colher; **c)** bola de basquete; **d)** caixa de madeira retangular; **e)** cabeça e nuca de uma pessoa; **f)** superfície superior de um micro-ondas.	superfícies.
NOTA EXPLICATIVA	Até este momento, é muito provável que você nunca tenha estudado os diferentes tipos de curvatura. É importante saber que: ❖ A <u>Geometria Euclidiana</u> é desenvolvida em uma superfície de <u>curvatura nula</u>; ❖ A <u>Geometria Hiperbólica</u> é desenvolvida em uma Superfície de <u>curvatura negativa</u>; ❖ A <u>Geometria Esférica</u> é desenvolvida em uma superfície de <u>curvatura positiva</u>.	Esta chamada tem por objetivo relacionar as superfícies com as diferentes Geometrias aplicadas.
E3, TEXTO2	*Após o surgimento do primeiro tipo de Geometria não Euclidiana (Geometria Hiperbólica), era natural que se pensasse na existência de uma outra nova Geometria; foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica (conhecida também geometria Riemanniana).* *Ele apresentou, em 1854, um artigo para a Universidade de Gottingen, na Alemanha, contendo suas suposições sobre os fundamentos da geometria, apresentando possibilidades de novas geometrias e novos espaços, contribuindo ricamente, tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da Física. Foi a partir da Geometria Riemanniana que Albert Einstein pôde encontrar o contexto necessário para a teoria da relatividade (EVES, 2011).*	Ocorrida após o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica apresentar, no texto histórico, a Geometria Esférica, bem como o nome do estudioso e o ano deste acontecimento.
E3, Q3	Sob seu ponto de vista, qual é a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica?	Entender as diferenças entre as duas Geometrias é primordial para a compreensão da mesma, pois os conceitos mudam de acordo com as superfícies em que são aplicadas.
E3, Q4	Imagine a seguinte situação: Caio e seu amigo resolveram dar a volta ao mundo percorrendo a linha do Equador. Ele disse que seguiria em linha reta indefinidamente. **a)** Represente este percurso no espaço abaixo. **b)** Represente, agora, em uma bola de isopor.	O objetivo desta questão é entender, na prática, as diferenças entre a superfície plana e a esférica. O aluno deve chegar à conclusão de que na plana, pode-se traçar uma linha reta indefinidamente, mas na esférica retorna-se ao ponto de partida.

	c) Quais são suas conclusões a respeito dessas duas representações que você acabou de traçar?	
E3, Q5	O segundo Postulado de Euclides afirma que: É possível “prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (EUCLIDES in BICUDO, 2009, p. 98). Na Geometria Riemanniana as retas são finitas, mas ilimitadas. Explique essa afirmação. (Dica: utilize a bola de isopor)	Tomando por base as conclusões afirmadas na questão anterior, o aluno deve refletir acerca das diferenças entre o postulado de Euclides (aplicado na superfície plana) e a afirmação de Riemann (aplicada na superfície de curvatura positiva); deverá concluir que ao traçar uma reta na esfera partimos e chegamos em um mesmo ponto, por isso são retas finitas, porém é possível dar quantas voltas desejar em cima da mesma reta ilimitadamente.
E3, Q6	Na Geometria Esférica Riemann (1826-1866) contradiz o quinto Postulado de Euclides anunciando que não existem retas paralelas a uma reta dada e que “quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro” (COUTINHO, 2001, p. 73). Você concorda que não existem retas paralelas na superfície esférica? Explique.	Esse é um ponto chave na Geometria Esférica, pois não existem retas paralelas nesta superfície. O professor não deve intervir nesta questão e deixar com que os alunos tirem suas próprias conclusões. Há aqueles que imaginam circunferências menores na esfera e por isso respondem que podem existir paralelismo na Esfera. Porém, é importante levar em consideração o conceito de reta na esfera, e isso ainda não foi explorado até o momento.
	Agora pegue a bola de isopor e elásticos. Você deve refletir sobre como demarcar dois círculos máximos em sua esfera. Esses círculos máximos têm algum ponto em comum? São paralelos? Momento de troca de ideias...	Neste momento, deixar os alunos explorarem a bola de isopor e os elásticos. Após o tempo destinado, o professor deve intervir e salientar que retas na esfera são os círculos máximos e portanto, não é possível pensar em círculos menores como retas.
	a) A partir das considerações feitas, se considerarmos círculos menores, existe paralelismo na esfera?	O objetivo desta questão é diferenciar retas de círculos menores na esfera.
NOTA EXPLICATIVA	❖ Na Geometria Esférica a menor distância entre dois pontos é o arco de uma circunferência máxima, denominada **<u>Geodésica</u>**. ❖ **<u>Circunferência máxima</u>**: é aquela que possui o mesmo raio da esfera, ou seja, a maior circunferência possível de ser traçada na superfície;	O quadro explicativo, chama a atenção para as circunferências máximas, denominadas Geodésicas, porém alguns autores referem-se a elas como retas.

NOTA EXPLICATIVA	❖ *<u>Eixo:</u> Qualquer reta que passa pelo centro O;* ❖ *<u>Polos:</u> Ponto de intersecção entre o eixo e com a superfície esférica. Os polos são representados na esfera como Polo Norte (N) e Polo Sul (S);* ❖ *<u>Equador:</u> É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo;* ❖ *<u>Paralelo:</u> Plano perpendicular ao eixo e paralelo ao Equador;* ❖ *<u>Meridiano:</u> É uma semicircunferência máxima que liga os Polos e passa pelo eixo.*	O objetivo deste quadro explicativo é apresentar os elementos de uma esfera, assunto este que os alunos já estudaram em séries anteriores em Geografia.
E3, Q7	**d)** De acordo com as definições, nomeie cada elemento notável presente na superfície esférica. 	Para resolver essa questão, o aluno necessita ler com atenção o quadro explicativo que antecede a atividade e nomear cada elemento da esfera. O conhecimento deste assunto é importante, pois foi por meio deste, e da Geometria Esférica, que outros conhecimentos se desenvolveram, como o GPS, utilizado para a localização.
E3, Q8	Vivemos em um planeta cujo formato é esférico, no qual valem as regras da superfície de curvatura positiva, então por que o engenheiro ao desenvolver a planta de uma casa, segundo a Geometria Plana, trabalha com retas e não com geodésica?	Essa pergunta fecha o encontro três e faz com que o aluno reflita e tente chegar a uma solução. Deve-se permitir uma discussão entre os alunos para que os mesmos cheguem a uma conclusão, sempre com a mediação do professor.

Fonte: Os Autores (2017)

Segue a ficha de orientações e as atividades relativas ao terceiro encontro.

Quadro 14 – Orientações para o terceiro encontro

Título da Atividade	Geometria Esférica
Objetivos da aula	É esperado que o aluno: * Reconheça as diferentes curvaturas como sendo da superfície plana, hiperbólica e esférica; * Compreenda conceitos da Geometria esférica, tais como: geodésica, círculos máximos, círculos menores, elementos notáveis da esfera e Postulado de Riemann.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* bola de isopor; * elásticos.
Estratégia	Inicia-se a aula com uma atividade diagnóstica a respeito das superfícies de curvatura nula, positiva e negativa.

	É solicitado que os alunos definam cada curvatura tendo por base os exemplos presentes no próprio material entregue. Após a apresentação das curvaturas, é requisitado ao aluno que explique as diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica. Em seguida, são propostas atividades envolvendo conceitos da Geometria Esférica, que podem ser resolvidas com o auxílio dos materiais manipuláveis. Os conceitos trabalhados são retas finitas e ilimitadas, retas paralelas na superfície esférica, circunferências máximas e elementos notáveis na superfície esférica.
Avaliação	A primeira pergunta da Sequência Didática tem caráter diagnóstico a fim de verificar se o aluno possui conhecimento prévio a respeito das superfícies de curvatura nula, positiva e negativa. Neste terceiro encontro pode ser atribuído uma nota (com valor a ser determinado pelo professor) aos alunos, pela realização das atividades (independentemente de o aluno ter realizado adequadamente os exercícios) e pela entrega da atividade “Refletindo um pouco” preenchida no final da aula. Cujo o objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação será de caráter formativo, e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Geometria Esférica

O quinto Postulado de Euclides (~325 – 260 a. C.) deu muito o que falar, vários matemáticos tentaram demonstrar o postulado como um teorema. Dentre os célebres matemáticos que tentaram essa demonstração, destacamos Proclus (410-485), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Gauss (1777 – 1855), Bolyai (1802 – 1860), Lochevsky (1793 – 1856), entre outros.

Foi possível perceber que a tentativa de demonstrar o quinto postulado perdurou por muitos anos. O quinto postulado de Euclides era válido para a geometria plana, mas se considerássemos superfícies com diferentes curvaturas, outros conceitos deveriam ser formados.

As tentativas de demonstrar esse quinto postulado proporcionaram vestígios de novas Geometrias, conhecidas como Geometrias não Euclidianas.

No ambiente que nos cerca, nos deparamos com objetos que possuem diferentes curvaturas.

 [17]

Mas espere aí!!

Curvatura... Essa palavra não é estranha!

Mas o que significa? O que você entende por curvatura?

Discussão da turma.

Como eu estava dizendo há diversos objetos com diferentes curvaturas, como por exemplo:

- ❖ O apoio de madeira da sua carteira tem curvatura nula;
- ❖ Uma bola de futebol tem curvatura positiva;
- ❖ Uma corneta tem curvatura negativa.

1. De acordo com os exemplos citados, defina com suas palavras:

a) curvatura nula:

____

____

b) curvatura positiva:

____

____

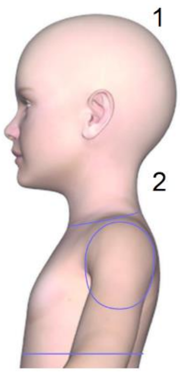
c) curvatura negativa:

____

____

[14] Fonte: https://www.pinterest.pt/vickymayo/emoticons-emojis/

2. Classifique cada objeto abaixo em curvatura nula, positiva ou negativa:

A)  ____________________ **Fonte:** https://pt.aliexpress.com/w/wholesale-spoon-wood.html	B)  ____________________ **Fonte:** https://pt.dreamstime.com/fotografia-de-stock-royalty-free-colher-baixo-ngulo-esquerdo-image211107	C)  ____________________ **Fonte:** http://queroimagem.blogspot.com.br/2012/06/bola-de-basquete-png.html
D)  ____________________ **Fonte:** http://www.palaciodaarte.com.br/madeira-mdf	E)  1)____________________ 2)____________________ **Fonte:** https://modailustrada.wordpress.com/	F)  ____________________ **Fonte:** http://www.casasbahia.com.br/Eletrodomesticos/FornodeMicroondas/Forno-de-Micro-ondas-Panasonic-Style-NNST674S-Inox-32L-4337649.html?recsource=busca-int&rectype=busca-21

Até este momento, é muito provável que você nunca tenha estudado os diferentes tipos de curvatura. É importante saber que:

- ❖ A <u>Geometria Euclidiana</u> é desenvolvida em uma superfície de <u>curvatura nula</u>;
- ❖ A <u>Geometria Hiperbólica</u> é desenvolvida em uma Superfície de <u>curvatura negativa</u>;

❖ A Geometria Esférica é desenvolvida em uma superfície de curvatura positiva.

> *Após o surgimento do primeiro tipo de Geometria não Euclidiana (Geometria Hiperbólica), era natural que se pensasse na existência de uma outra nova Geometria; foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica (conhecida também geometria Riemanniana).*
>
> *Ele apresentou, em 1854, um artigo para a Universidade de Gottingen, na Alemanha, contendo suas suposições sobre os fundamentos da geometria, apresentando possibilidades de novas geometrias e novos espaços, contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física. Foi a partir da Geometria Riemanniana que Albert Einstein pôde encontrar o contexto necessário para a teoria da relatividade (EVES, 2011).*

3. Sob seu ponto de vista, qual é a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica?

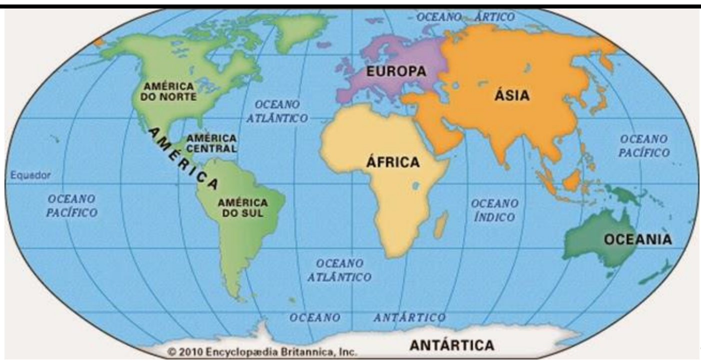
____

____

Para resolver as atividades propostas a seguir você precisará de bola de isopor e elásticos. Chegou o momento de explorar a esfera. Mãos à obra!!

4. Imagine a seguinte situação: Caio e seu amigo resolveram dar a volta ao mundo percorrendo a linha do Equador. Ele disse que seguiria em linha reta indefinidamente.

a) Represente este percurso no espaço abaixo.



[15]

b) Represente, agora, em uma bola de isopor.

[15] **Fonte:** http://viajandonageo.blogspot.com.br/2015/03/mapa-mundi.html

c) Quais são as suas conclusões a respeito dessas duas representações que você acabou de traçar?

5. O segundo Postulado de Euclides afirma que: É possível “prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (BICUDO in Euclides, 2009, p. 98). Na Geometria Riemanniana as retas são finitas, mas ilimitadas. Explique essa afirmação. (Dica: utilize a bola de isopor)

6. Na Geometria Esférica Riemann (1826-1866) contradiz o quinto Postulado de Euclides anunciando que não existem retas paralelas a uma reta dada e que “quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro” (COUTINHO, 2001, p. 73).
Você concorda que não existem retas paralelas na superfície esférica? Explique.

Agora pegue a bola de isopor e elásticos.
Você deve refletir sobre como demarcar dois círculos máximos em sua esfera.
Esses círculos máximos têm algum ponto em comum? São paralelos?

[16] Momento de troca de ideias...

a) A partir das considerações feitas, se considerarmos círculos menores, existe paralelismo na esfera?

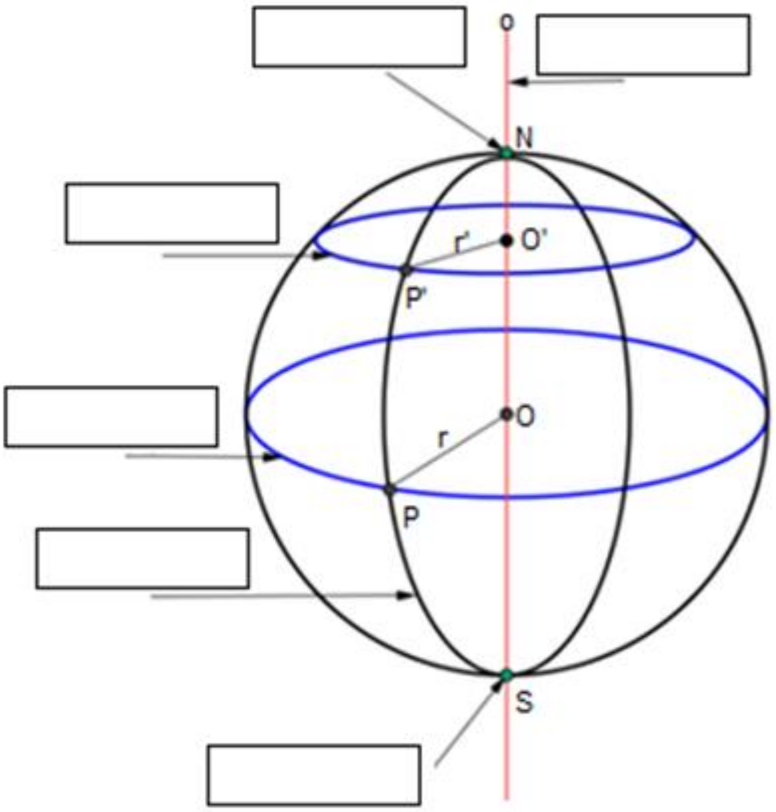
[16] **Fonte:** http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto/

❖ Na Geometria Esférica a menor distância entre dois pontos é o arco de uma circunferência máxima, denominada **Geodésica**.
❖ **Circunferência máxima**: é aquela que possui o mesmo raio da esfera, ou seja, a maior circunferência possível de ser traçada na superfície.

Vamos conhecer os elementos notáveis da superfície esférica?

❖ *Eixo:* *Qualquer reta que passa pelo centro O;*
❖ *Polos:* *Ponto de intersecção entre o eixo e com a superfície esférica. Os polos são representados na esfera como Polo Norte (N) e Polo Sul (S);*
❖ *Equador:* *É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo;*
❖ *Paralelo:* *Plano perpendicular ao eixo e paralelo ao Equador;*
❖ *Meridiano:* *É uma semicircunferência máxima que liga os Polos e passa pelo eixo.*

7. De acordo com as definições, nomeie cada elemento notável presente na superfície esférica.



[17]

---

[17] **Fonte:** ZANELLA, I.A.; **Geometria Esférica:** Uma proposta de Atividades com Aplicações. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

8. Vivemos em um planeta cujo formato é esférico, no qual valem as regras da superfície de curvatura positiva, então por que o engenheiro ao desenvolver a planta de uma casa, segundo a Geometria Plana, trabalha com retas e não com geodésica?

____
____
____

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu hoje?

____

____

____

2. Quais foram as facilidades que você apresentou hoje?

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você apresentou neste encontro?

____

____

____

5. Síntese reflexiva.

____

____

____

O Quadro 15 apresenta os objetivos de cada atividade proposta para o quarto encontro.

Quadro 15 – Ficha explicativa para o quarto encontro

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
E4, AT1	**Até o momento aprendemos que:** ***** Há superfícies de curvatura ___________, ___________ e ___________; * A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo inserido na superfície plana é igual a ________. E numa superfície esférica? ____________________ * O que mais aprendemos na aula passada?	O objetivo desta primeira atividade é revisar alguns conhecimentos já vistos até o momento.
E4, Q1	Com a bola de isopor maior em mãos, marque três pontos A, B e C não colineares sobre sua superfície. Ligue esses pontos e responda: **a)** Que figura você formou? **b)** Com o transferidor flexível meça os ângulos internos desse triângulo. $\hat{A}$:_____$\hat{B}$:_____$\hat{C}$:______ **c)** Determine a soma dos ângulos internos deste triângulo: _________________	O objetivo desta atividades é fazer com que os alunos trabalhem com o transferidor flexível e determinem a soma dos ângulos internos de seu triângulo. Fica a critério do professor permitir que os alunos socializem as respostas, a fim de que percebam que essa soma nunca será menor que 180° e nem maior que 540°.
E4, Q2	Construa, no espaço abaixo, um triângulo plano que possua três ângulos retos: **a)** Foi possível construir um triângulo com três ângulos retos nesta folha de papel? Justifique.	O objetivo da atividade é fazer com que os alunos se certifiquem de que não é possível construir esse triângulo no plano.
E4, Q3	Utilizando os materiais disponíveis para a realização das atividades, tente construir um triângulo que possua três ângulos retos na bolinha de isopor menor e responda: **a)** Foi possível realizar a construção? **b)** Qual é a soma dos ângulos internos deste triângulo esférico? **c)** Este triângulo possui os três lados iguais? Justifique. **d)** Agora, com ajuda de seu colega e utilizando a bola de isopor, elásticos e alfinetes, construa o maior triângulo possível na bolinha de isopor. Qual é a soma aproximada dos ângulos internos deste triângulo esférico?	O objetivo desta questão é mostrar aos alunos que na bola de isopor a construção do triângulo é possível, o que não se aplica na questão anterior. Essas atividades evidenciam algumas diferenças entre a Geometria Plana e a Esférica.

NOTA EXPLICATIVA	**Classificação em relação a seus ângulos:** Retângulo: possui um único ângulo reto; Birretângulo: possui dois ângulos retos; Trirretângulo: possui três ângulos retos. **Classificação em relação a seus lados:** Retilátero: possui um lado medindo 90°; Birretilátero: possui dois lados medindo 90°; Trirretilátero: possui três lados medindo 90°.	Essa nota classifica os triângulos esféricos quanto a seus ângulos e lados.
E4, Q4	Para calcular a área de uma superfície esférica utilizamos: $A_S = 4\pi r^2$. Considerando a menor bolinha de isopor disponível e sabendo que seu raio mede aproximadamente 2,9 cm, determine sua área. (Dados: π= 3,14; A= área; r= raio)	Os dois problemas envolvem o cálculo da área de uma superfície esférica por meio da fórmula apresentada.
E4, Q5	Um artista plástico deseja colocar em uma de suas obras uma bola de gesso de 2,30 m de diâmetro, no entanto será necessário pintá-la de dourado. Calcule o custo com a tinta sabendo que o metro quadrado tem um custo de R$ 195,00.	
E4, Q6	O nosso Planeta possui aproximadamente 6.370 km de raio. Com base nessa informação determine: **a)** a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície esférica total. **b)** O volume da esfera. (Dados: $V= 4/3\pi r^3$)	Essa questão envolve área de uma superfície esférica, bem como o volume da esfera, por meio das fórmulas apresentadas.

Fonte: Os Autores (2017)

A seguir são apresentadas as orientações e as atividades do quarto encontro, bem como as fichas avaliativas finais.

Quadro 16 – Orientações para o quarto encontro

Título da Atividade	Geometria Esférica – Área e Volume
Objetivos da aula	* Reconhecer um triângulo esférico; * Determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico; * Explorar a área e o volume da superfície esférica.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* 02 bolas de isopor (uma maior e outra menor); * elásticos; * alfinetes.
Estratégia	Inicia-se a aula com um diálogo a respeito dos conteúdos aprendidos nas aulas anteriores.

	Em seguida, trabalhamos com a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na esfera, bem como com a apresentação de um triângulo trirretângulo. Logo após, são propostas atividades envolvendo soma dos ângulos internos, a área e o volume de uma superfície esférica.
Avaliação	Neste quarto encontro pode ser atribuída uma nota (com valor a ser determinado pelo professor) aos alunos, pela realização das atividades (independentemente de o aluno ter realizado adequadamente os exercícios). Ao final das atividades é proposta uma atividade avaliativa “Refletindo um pouco”, cujo o objetivo é coletar as impressões dos alunos entorno dos encontros realizados. Esta avaliação é de caráter formativo e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Geometria Esférica – Área e Volume

[18]**Até o momento aprendemos que:**

[19]

***** Há superfícies de curvatura ___________, ____________ e ____________;

* A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo inserido na superfície plana é igual a ________.

E numa superfície esférica? _____________________

* O que mais aprendemos na aula passada?

TRIÂNGULOS

1. Com a bola de isopor maior em mãos, marque três pontos A, B e C não colineares sobre sua superfície. Ligue esses pontos e responda:

a) Que figura você formou? ____

b) Com o transferidor flexível meça os ângulos internos desse triângulo.

$\hat{A}$: _____ $\hat{B}$: _____ $\hat{C}$: ______

c) Determine a soma dos ângulos internos deste triângulo: __________________

2. Construa, no espaço abaixo, um triângulo plano que possua três ângulos retos:

---

[18] **Fonte:** http://www.osinvicioneiros.com.br/2012/04/tres-cancoes-pra-lembrar.html
[19] **Fonte:** http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto/

a) Foi possível construir um triângulo com três ângulos retos nesta folha de papel? Justifique.

____

____

3. Utilizando os materiais disponíveis para a realização das atividades, tente construir um triângulo que possua três ângulos retos na bolinha de isopor menor e responda:

a) Foi possível realizar a construção? ______________________________

b) Qual é a soma dos ângulos internos deste triângulo esférico? ____________

c) Este triângulo possui os três lados iguais? Justifique.

____

____

d) Agora, com ajuda de seu colega, e utilizando a bola de isopor, elásticos e alfinetes, construa o maior triângulo possível na bolinha de isopor. Qual é a soma aproximada dos ângulos internos deste triângulo esférico?

____

CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Classificação em relação a seus ângulos:
Retângulo: possui um único ângulo reto;
Birretângulo: possui dois ângulos retos;
Trirretângulo: possui três ângulos retos.

Classificação em relação a seus lados:
Retilátero: possui um lado medindo 90°;
Birretilátero: possui dois lados medindo 90°;
Trirretilátero: possui três lados medindo 90°.

ÁREA e VOLUME DA ESFERA

4. Para calcular a área de uma superfície esférica utilizamos: $A_S= 4\pi r^2$. Considerando a menor bolinha de isopor disponível e sabendo que seu raio mede aproximadamente 2,9 cm, determine sua área. (Dados: π= 3,14; A= área; r= raio)

5. Um artista plástico deseja colocar em uma de suas obras uma bola de gesso de 2,30 m de diâmetro, no entanto será necessário pintá-la de dourado. Calcule o custo com a tinta sabendo que o metro quadrado tem um custo de R$ 195,00.

6. O nosso Planeta possui aproximadamente 6.370 km de raio. Com base nessa informação determine:

a) a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície esférica total.

Fonte: http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com.br/2013/11/questoes-resolvidas-de-vestibulares_21.html

b) O volume da esfera. (Dados: $V = 4/3\pi r^3$)

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu hoje?

____

____

____

2. Quais foram as facilidades que você apresentou hoje?

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você apresentou neste encontro?

____

____

____

5. Síntese reflexiva.

____

____

____

Os Quadros 17 e 18 apresentam os objetivos das fichas avaliativas finais.

Quadro 17 – Ficha explicativa “Refletindo a respeito dos encontros”

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
REFLETINDO A RESPEITO DOS ENCONTROS		
E5, Q1	Você já sabia que existem outras geometrias diferentes da plana? Justifique.	O questionário visa orientar o professor acerca da necessidade de adequação na Sequência Didática para as próximas aplicações. As perguntas orientam os alunos a externar suas considerações a respeito do assunto (se é inédito ou não), a respeito da linguagem (se está adequada), se ainda ficaram resquício de dúvidas sobre o assunto e se as atividades e conjunto com os materiais manipulados foram suficientes para despertar o interesse dos alunos para aprendendizagem.
E5, Q2	As atividades propostas nas aulas favoreceram sua aprendizagem? Comente.	
E5, Q3	As informações e os conteúdos presentes nas atividades foram claras e de fácil compreensão? Comente.	
E5, Q4	Você ainda ficou com dúvidas a respeito de alguns assuntos das aulas? Quais?	
E5, Q5	O que você achou das aulas? Foram interessantes? Despertou sua curiosidade? Comente.	

Fonte: Os Autores (2017)

Quadro18 – Ficha explicativa “Atividade avaliativa”

Identificação	Atividade	Objetivos/observações
ATIVIDADE AVALIATIVA		
E5, Q1	Os Elementos foi uma obra que predominou por mais de dois mil anos no ensino da Geometria Plana. Qual era o nome do autor desta obra?	Euclides foi um estudioso de grande importância para a Geometria Plana e para as Geometrias não Euclidianas. Evidenciá-lo é primordial no estudo do assunto.
E5, Q2	A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano é igual a quantos graus?	Esse conhecimento deve estar bem estruturado na consciência do aluno, pois é um dos conceitos que muda dependendo da superfície em que traçamos o triângulo, além de servir de base a reaolução de outros problemas envolvendo a Geometria Plana.
E5, Q3	Por que o quinto postulado de Euclides de Alexandria (~325 e 260 a.C.) causou tanta polêmica entre a comunidade científica?	Esse ponto foi o estopim para o desenvolvimento das novas Geometrias.
E5, Q4	Que matemático desenvolveu a Geometria Esférica?	Evidenciar o matemático que desenvolveu a Geometria Esférica, foco do nosso estudo, é essencial.
E5, Q5	Se um triângulo está inscrito em uma superfície esférica, a soma dos ângulos internos deste triângulo pode assumir valores entre ________________ e __________________	Esse conceito é um dos que difere da Geometria Plana, e um dos pontos base para a compreensão da Geometria

		Esférica.
E5, Q6	Dê, com suas palavras, a definição e cite um exemplo de curvatura: Nula: Positiva: Negativa:	Saber diferenciar as diferentes curvaturas e ser capaz de citar exemplos de cada uma deles é o suporte necessário para compreender a respeito das diferentes curvaturas que cada Geometria aplica.
E5, Q7	É possível traçar retas paralelas na esfera? Explique.	Conceito de extrema importância para a Geometria Esférica. O aluno precisa ter ciência do que são retas na esfera e o que é paralelismo.
E5, Q8	Determine o raio e o volume de uma esfera que possui área igual a 1808,64 u^2.	Essas atividades exigem interpretação do aluno para resolver problemas, na aplicação das fórmulas e no desenvolvimento das mesmas. Fica a critério do professor o oferecimento das fórmulas para a resolução do exercício.
E5, Q9	Uma fábrica de chocolates, visando aumentar suas vendas para o dia dos namorados, deseja fabricar bombons no formato de uma esfera. Para saber o custo dessa produção, precisa calcular a quantidade necessária de chocolate para o recheio. Sabendo que cada bombom tem 1,7cm de raio e será inteiro recheado de chocolate, calcule a capacidade desses bombons esféricos, considerando que a espessura da casca crocante é de 0,2cm.	

Fonte: Os Autores (2017)

Quadro 19 – Orientações Atividades Avaliativas

Título da Atividade	**Atividades Avaliativas**
Objetivos	A atividade “Refletindo a Respeito dos Encontros” tem como objetivo coletar as impressões dos alunos a respeito dos encontros realizados. A “Atividade Avaliativa” tem o objetivo de verificar a aprendizagem dos alunos com relação ao tema estudado
Duração	50 minutos
Estratégia	Após a aplicação da atividade “Refletindo a Respeito dos Encontros”, aplicar a “Atividade Avaliativa”. É permitido o usa da calculadora. Fica a critério do professor disponibilizar as fórmulas para a realização dos problemas que envolvem área e volume. O professor não deve intervir nas respostas dos alunos.
Avaliação	A atividade avaliativa “Refletindo a Respeito dos Encontros” é de caráter formativo e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min. A avaliação “Atividade Avaliativa” é de caráter somativo, para qual será atribuindo um valor (a ser determinado pelo professor). Às questões propostas que estiverem corretas serão atribuídas notas integrais; já as notas das questões parcialmente corretas corresponderão à essa parcialidade. Às questões incorretas não será atribuída nota. Duração: 40 min.

Fonte: Os Autores (2017)

REFLETINDO A RESPEITO DOS ENCONTROS

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. Você sabia que existem outras geometrias diferentes da plana? Justifique.

____

____

____

2. As atividades propostas nas aulas favoreceram sua aprendizagem? Comente.

____

____

____

3. As informações e os conteúdos presentes nas atividades foram claras e de fácil compreensão? Comente.

____

____

____

4. Você ainda ficou com dúvida a respeito de alguns assuntos das aulas? Quais?

____

____

____

5. O que você achou das aulas? Foram interessantes? Despertou sua curiosidade? Comente.

____

____

____

Atividade Avaliativa

Nome:____ **Data:** _________

1. Os Elementos foi uma obra que predominou por mais de dois mil anos no ensino da Geometria Plana. Qual era o nome do autor desta obra?

____

2. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano é igual ______ graus.

3. Por que o quinto postulado de Euclides de Alexandria (~325 e 260 a.C.) causou tanta polêmica entre a comunidade científica?

____

____

____

4. Qual era o nome do matemático desenvolveu a Geometria Esférica?

____

5. Se um triângulo está inscrito em uma superfície esférica, a soma dos ângulos internos deste triângulo pode assumir valores entre ____________e ____________.

6. Dê, com suas palavras, a definição e cite um exemplo de curvatura:

Nula:

____

____

____

Positiva:

____

____

____

Negativa:

7. É possível traçar retas paralelas na esfera? Explique.

8. Determine o raio e o volume de uma esfera que possui área igual a 1808,64 u^2.

9. Uma fábrica de chocolates, visando aumentar suas vendas para o dia dos namorados, deseja fabricar bombons no formato de uma esfera. Para saber o custo dessa produção, precisa calcular a quantidade necessária de chocolate para o recheio. Sabendo que cada bombom tem 1,7cm de raio e será inteiro recheado de chocolate, calcule a capacidade desses bombons esféricos, considerando que a espessura da casca crocante é de 0,2cm.

6 ANÁLISE DOS DADOS

6.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DE ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA

A Análise Textual Discursiva vem sendo cada vez mais utilizada na compreensão dos fatos que uma pesquisa investiga mediante textos, elaborando o objeto de análise por meio de entrevistas, observações ou até mesmo Sequências Didáticas, foco desta pesquisa (MORAES; GALIAZZI, 2014).

Para realizar a Análise Textual Discursiva, é necessário considerar quatro etapas, a saber: I) Desmontagem dos textos; II) Estabelecimento de Relações; III) Captação do novo emergente; e, IV) Processo de auto-organização.

A desmontagem do “corpus”[20], também conhecida como unitarização, refere-se ao estudo minucioso dos dados da pesquisa e, desta forma, é necessário realizar a desmontagem do material a ser analisado e evidenciar os elementos nele presentes, construindo assim, as Unidades de Análise.

Após identificar as Unidades de Análise, faz-se necessário estabelecer relações entre elas, agrupando-as de acordo com elementos semelhantes. Esses agrupamentos formam as Categorias (por vezes Subcategorias), que devem apresentar validade estando adequadas aos objetivos da pesquisa.

Ao analisar o “corpus” passando pelas duas etapas já citadas, torna-se necessário desenvolver um texto que contenha uma interpretação geral dos dados, denominado como metatexto que, de acordo com Moraes e Galiazzi, “é um movimento sempre inacabado de procura de mais sentidos, a fim de aprofundamento gradativo da compreensão dos fenômenos” (p. 37, 2014). Esta etapa foi denominada de Captando o novo emergente, cujo objetivo é o de externar as compreensões atingidas pelo pesquisador por meio da análise dos dados.

Segundo Moraes e Galiazzi (2014, p. 12), “o ciclo de análise, ainda que composto de elementos racionalizados e em certa medida planejados, em seu todo deve ser compreendido como um processo auto organizado do qual emergem novas compreensões”. Assim, além de proporcionar novas compreensões do

[20] “A análise textual concretiza-se a partir de um conjunto de documentos denominado “corpus”. Este representa as informações da pesquisa e para a obtenção de resultados válidos e confiáveis, requer uma seleção e delimitação rigorosa” (MORAES; GALIAZZI, p. 16, 2014).

material analisado, possibilita a reconstrução de ideias já existentes em relação ao conteúdo investigado.

Nesta pesquisa utilizamos a Análise Textual Discursiva para analisar a produção dos alunos que compuseram a amostra cuja coleta foi realizada por meio de uma Sequência Didática.

6.2 Análise dos Dados

Neste tópico serão analisadas, à luz da Análise Textual Discursiva, as atividades realizadas pelos alunos no decorrer da aplicação da Sequência Didática, além das fichas avaliativas respondidas ao final de cada encontro e das duas avaliações finais, uma referente aos encontros e outra referente ao conteúdo abordado.

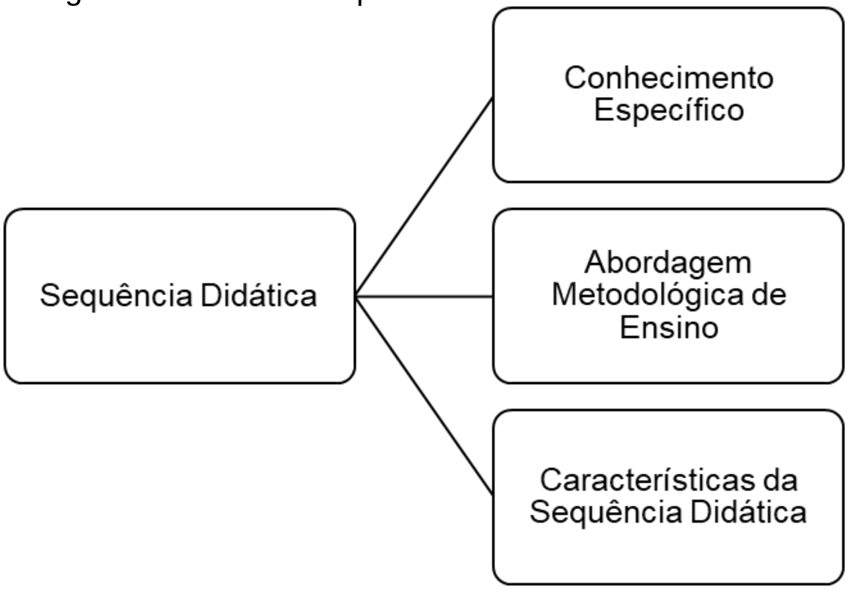
Ao examinarmos o "corpus", organizamos e codificamos as informações presentes no material de análise. A codificação dos elementos presentes nesta análise ocorreu da seguinte forma:

- A1, A2, ... , A22 – refere-se aos alunos que participaram da SD;
- E1, E2, E3, E4 – refere-se aos encontros em que foram realizadas as atividades;
- Q1, Q2, Q3, ... – refere-se às questões de cada encontro;
- Q1a, Q1b, Q1c, ... – refere-se ao item da questão analisada;
- AVR1, AVR2, AVR3 e AVR4 – refere-se às avaliações de rotina preenchidas ao término de cada encontro sob o título de "Refletindo um pouco";
- AVF1 e AVF2 – refere-se às avaliações finais aplicadas após a aplicação da Sequência Didática, sob os títulos de "Refletindo a Respeito dos Encontros" e "Atividade Avaliativa", respectivamente.

Importante salientar que foram apresentados somente dois excertos em cada Unidade, embora algumas unidades contenham somente um excerto apresentado pelos alunos. Isso se fez necessário por conta do grande espaço que ocuparia a apresentação de todos os excertos em cada Unidade.

Ao analisar os dados oriundos da aplicação da SD, três categorias foram previamente delineadas, conforme Figura 19.

Figura 19 – Categorias selecionadas para análise

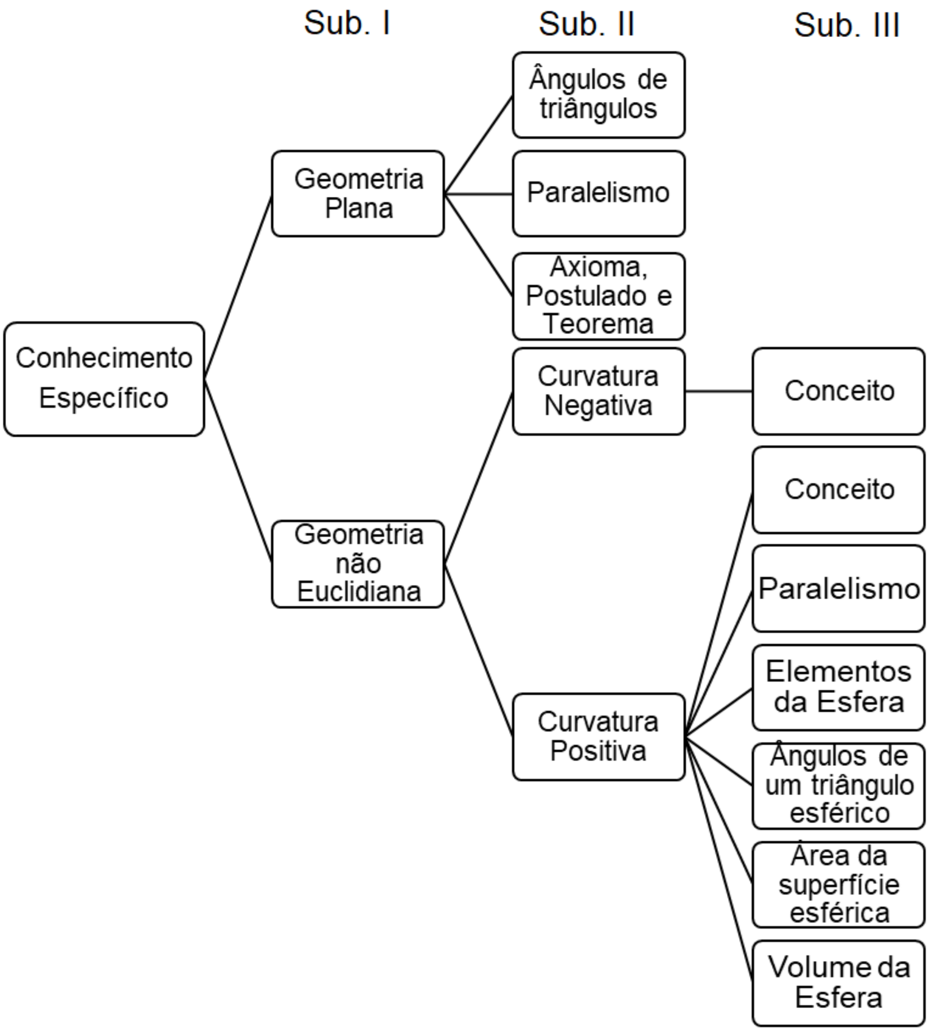


Fonte: Os Autores (2017)

CATEGORIA I: CONHECIMENTO ESPECÍFICO

A primeira Categoria refere-se aos conteúdos abordados na SD, a saber: Geometria Plana e Geometria não Euclidiana. Essa Categoria compreende duas Subcategorias I, cinco Subcategorias II, sete Subcategorias III, conforme demonstrado na Figura 20. As Unidades serão apresentadas posteriormente quando do detalhamento de cada Subcategoria.

Figura 20 – Categoria prévia de Conhecimentos específicos

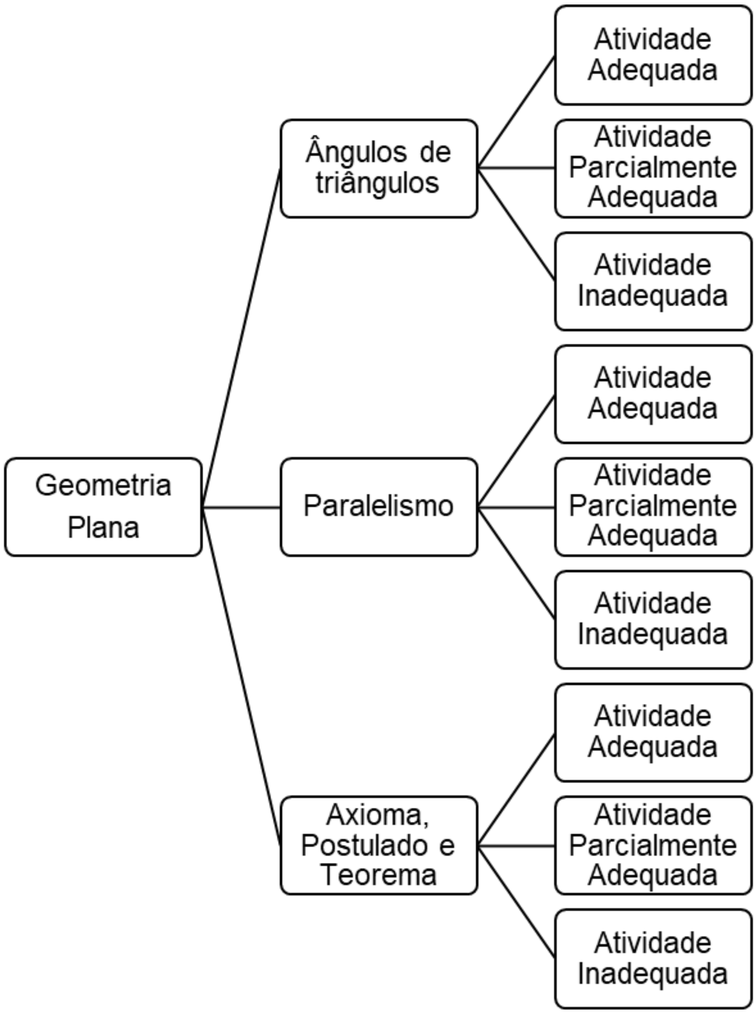


Fonte: Os Autores (2017)

I) Subcategoria I: Geometria Plana

A Subcategoria I "Geometria Plana" tem por objetivo evidenciar as atividades desenvolvidas pelos alunos referentes à medida e soma dos ângulos internos de um triângulo plano; retas paralelas; e, diferenciação entre postulados de teoremas, conforme Figura 21.

Figura 21 – Subcategoria I “Geometria Plana”, Subcategorias II e Unidades prévias

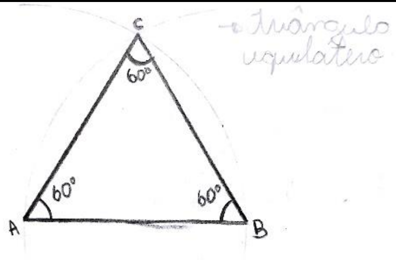
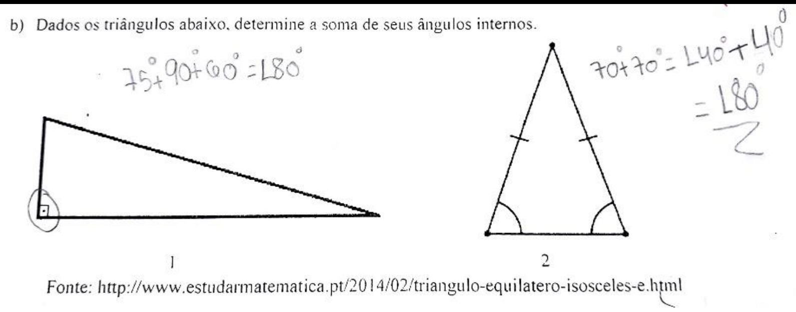
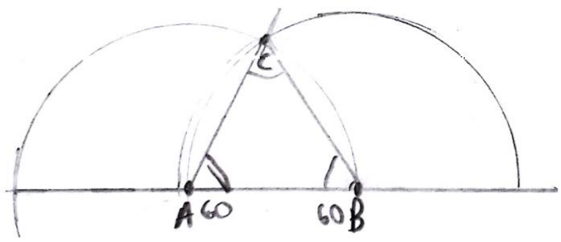


Fonte: Os Autores (2017)

Subcategoria II: Ângulos de Triângulos

Essa Subcategoria compreende os excertos dos alunos referentes às medidas dos ângulos internos de um triângulo; soma dos ângulos internos de um triângulo; e, construção de um triângulo equilátero. Todas as Unidades “Atividade Adequada”, “Atividade Parcialmente Adequada” e “Atividade Inadequada” foram efetivadas, como é possível observar no Quadro 20.

Quadro 20 – Subcategoria II: Ângulos de triângulos

Atividade Adequada	"Seria impossível, pois os lados não se encontrariam e nunca formaria um triângulo" (A12, E1, Q1d).
	 (A1, E1, Q1)
Atividade Parcialmente Adequada	"A soma dá aproximadamente igual, porém os ângulos são diferentes" (A10, E1, Q1c).
	 (A18, E1, Q1b)
Atividade Inadequada	 (A16, E1, Q1)

Fonte: Os Autores (2017)

Nesta Subcategoria a ideia era identificar se os alunos tinham uma compreensão adequada de como medir ângulos internos de um triângulo no plano e se reconheciam que a soma dos ângulos deveria resultar em 180°.

A partir dos excertos, foi possível notar que o aluno A12 respondeu de maneira adequada quando indagado se seria possível construir um triângulo cuja soma de seus ângulos internos fosse maior que 180°. O aluno A1 construiu corretamente, seguindo o roteiro apresentado na atividade, o triângulo equilátero com 4 cm de lado e ângulos internos igual a 60°.

O aluno A10 respondeu de maneira parcialmente adequada quando indagado se os ângulos internos de um triângulo sempre somam 180°, pois para ele as somas podem apenas se aproximar desse valor. O aluno A18 não aferiu corretamente os ângulos internos do triângulo escaleno, nem realizou o cálculo da soma de maneira assertiva, afinal, expôs que 75°+90°+60°= 180°, quando o correto seria 225°. Porém, realizou adequadamente as medições e a soma dos ângulos internos do triângulo isósceles proposto ainda na atividade 1b, o que garante a realização parcial da mesma.

O aluno A16 não construiu o triângulo equilátero da maneira como foi solicitado, pois os lados de sua figura não possuem os 4 cm exigidos, nem seus ângulos internos possuem os 60° necessários para satisfazer a existência de um triângulo equilátero.

O Quadro 21 mostra, de maneira geral, as atividades relacionadas nesta Subcategoria e a quantidade de alunos que realizaram as atividades de maneira adequada, parcialmente adequada ou inadequada.

Quadro 21 –Subcategoria II “Ângulos de triângulos” – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	**Resposta Adequada**	**Resposta Parcialmente Adequada**	**Resposta Inadequada**
Q1/E1	19	02	01
Q1a/E1	19	03	00
Q1b/E1	14	08	00
Q1c/E1	19	03	00
Q1d/E1	19	03	00
Q2/AVF2	22	00	00
Total	112	19	01

Fonte: Os Autores (2017)

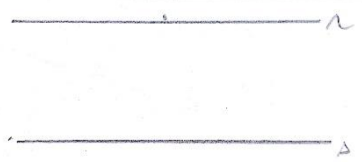
Como percebemos, a questão Q1b foi a que mais apresentou respostas parcialmente adequadas, o que evidencia a dificuldade que os alunos enfrentam ao manipular o transferidor. Porém, de modo geral, foi possível notar que os estudantes possuem noções suficientes a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo traçado no plano para aprofundar seus conhecimetos e conhecer novas Geometrias.

O Caderno de Expectativas e Aprendizagem do Estado do Paraná expõe que o aluno deve terminar o 8° ano do Ensino Fundamental sabendo aplicar a “propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície plana” (PARANÁ, 2012, p. 91). Assim, as atividades aqui propostas já deveriam fazer parte do conhecimento geométrico dos alunos a que se destina essa pesquisa; tais questões são propostas para rememorar essas propriedades essenciais para compreender novos conteúdos que serão apresentados mais adiante.

Subcategoria II: Paralelismo

Nessa Subcategoria, o objetivo é fazer com que o aluno recorde o conceito de retas paralelas existentes no plano. Das Unidades previamente delineadas, somente a “Atividade Adequada” e “Atividade Inadequada” se efetivaram, contudo, a Unidade “Atividade não Resolvida” emergiu dos dados, como é possível observar no Quadro 22.

Quadro 22 – Subcategoria II: Paralelismo

Atividade Adequada	“Retas que não se cruzam” (A6, E1, Q7c).
	 (A13, E1, Q7b).
Atividade Inadequada	“Para demonstrar direções” (A22, E1, Q7c).
Atividade não Resolvida	(A5, E1, Q7c); (A12, E1, Q7c).

Fonte: Os Autores (2017)

A partir dos excertos, nota-se que o aluno A6 compreendeu o que são retas paralelas ao responder que são aquelas que não se cruzam e o aluno A13 esboçou corretamente o substituto do quinto Postulado de Euclides, proposto por John Playfar. Já o aluno A22, não entendeu o conceito de retas paralelas, tendo em vista que em sua compreensão as retas indicam direções. Somente um aluno apresentou resolução inadequada das atividades propostas. Do total de alunos, três deixaram de responder a questão Q7c.

O Quadro 23, exibe a quantidade de respostas adequadas, inadequadas e não respondidas relacionadas às atividades envolvendo conceitos de paralelismo.

Quadro 23 – Subcategoria II: “Paralelismo” – Análise Quantitava

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Inadequada	Não Respondeu
Q7b/E1	22	00	00
Q7c/E1	18	01	03
Total	40	01	03

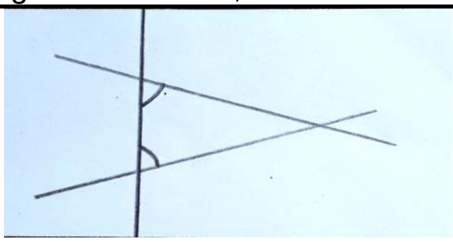
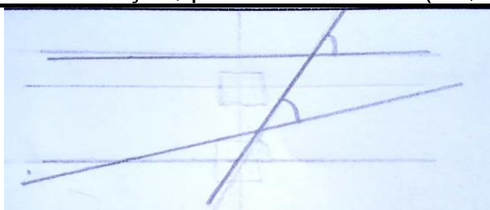
Fonte: Os Autores (2017)

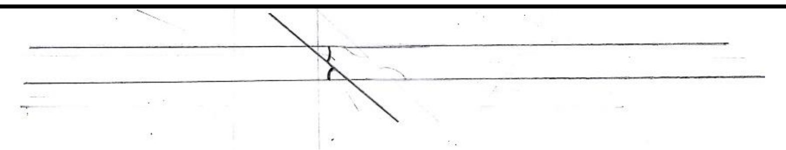
Pode-se notar que a maioria dos pesquisados já possuía o conceito de retas paralelas, pois realizaram as atividades de maneira assertiva, embora três não tenham respondido a Q7c, e um tenha apresentado resposta inadequada. A constatação mostra-se positiva para o trabalho que será desenvolvido posteriormente com os alunos.

Subcategoria II: Axioma, Postulado e Teorema

Nesta Subcategoria as atividades apresentam os conceitos de Axioma, Postulado e Teorema, bem como explorar o quinto Postulado enunciado por Euclides. Todas as Unidades previstas se efetivaram. No Quadro 24, apresentamos os excertos separados para esta Subcategoria.

Quadro 24 – Subcategoria II: Axioma, Postulado e Teorema

<table>
<tr><td rowspan="2">Atividade Adequada</td><td> (A5, E1, Q6c)</td></tr>
<tr><td>“Não, o V postulado na minha opinião necessita de uma demostração, pois não é obvio” (A3, E1, Q5)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Atividade Parcialmente Adequada</td><td> (A13, E1, Q6a)</td></tr>
<tr><td>“Axioma é uma coisa verdadeira, uma demonstração que não dá para demonstrar, verdades universalmente válidas e inquestionáveis” (A8, E1, Q3)</td></tr>
</table>

Atividade Inadequada	 (A15, E1, Q6a)
	“Porque Euclides havia deixado de uma forma difícil de compreensão e para se tornar postulado, John Playfar refez o postulado” (A7, E1, Q7a).

Fonte: Os Autores (2017)

Na análise dos dados do aluno A5 nota-se a representação adequada do quinto postulado de maneira independente, sem auxílio do professor. Já o aluno A3 expressou suas impressões a respeito dos Postulados de Euclides de maneira semelhante ao que pensavam diversos matemáticos do passado, ou seja, a seu ver o Quinto Postulado não é óbvio e necessita uma demonstração, o que o tornaria um Teorema.

O aluno A13 chegou perto de demonstrar o Quinto Postulado adequadamente, contudo na reta traçada na parte superior marcou o ângulo externo, quando o Postulado refere-se aos ângulos internos menores que dois retos. Já o aluno A8 compreendeu o significado de Axioma, porém confundiu-se no momento de formular sua resposta ao dizer que Axioma é uma demonstração não demonstrável, o que não faz sentido.

O aluno A15 não representou adequadamente o Quinto Postulado. Em sua interpretação, retratou ângulos alternos internos e retas paralelas quando Euclides sequer menciona sobre elas. O aluno A7 entendeu que o quinto Postulado era um Teorema e que para ser classificado como Postulado deveria deixar seu texto menos complexo, como fez John Playfar.

O Quadro 25 apresenta as quantidades de respostas dadas referentes às atividades envolvendo Axiomas, Postulados e Teoremas.

Quadro 25 –Subcategoria II: “Axioma, Postulado e Teorema” – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q3/E1	19	03	00
Q4a/E1	22	00	00
Q4b/E1	22	00	00
Q4c/E1	22	00	00
Q4d/E1	22	00	00

Q4e/E1	21	00	01
Q4f/E1	00	00	21
Q5/E1	21	00	01
Q6a/E1	06	03	13
Q6b/E1	-	-	-
Q6c/E1	22	00	00
Q7a/E1	18	02	02
Q3/AVF2	19	03	00
Total	214	11	38

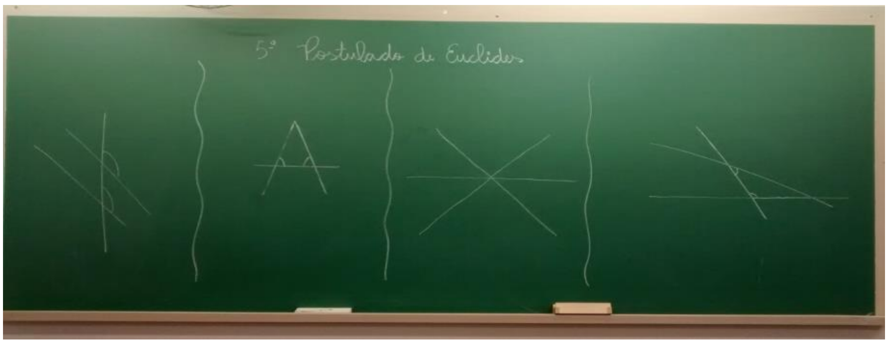
Fonte: Os Autores (2017)

Os resultados mostram que grande parte dos alunos compreendeu o conceito de Axioma, Postulado e Teorema e demonstrou tal apendizado quando 100% dos pesquisados acertaram as questões 4a, 4b, 4c e 4d, cujo objetivo era classificar cada afirmação apresentada em Axioma, Postulado ou Teorema. A grande dificuldade ficou evidente na classificação do Quinto Postulado, quando nenhum dos pesquisados o classificou de maneira correta, porém essa situação já era prevista.

De maneira semelhante, a questão Q6a apresentou muitas respostas inadequadas, o que também já era esperado, visto que solicitava a demonstração do quinto Postulado de acordo com a interpretação pessoal do aluno, sem que esse assunto tenha sido trabalhado anteriormente e sem o auxílio do professor.

A Q6b foi realizada no quadro de giz, por quatro alunos, um de cada fila, escolhidos pelos próprios envolvidos para esboçar sua demonstração do Quinto Postulado e assim subsidiar uma discussão sobre qual delas mais se aproximava do texto. A Figura 22 expõe os esboços feitos no quadro de giz.

Figura 22 – Representação do 5° Postulado segundo a interpretação do aluno



Fonte: Os Autores (2017)

A partir do exposto no quadro de giz, após uma nova leitura do texto do Quinto Postulado, os alunos chegaram à conclusão de que a segunda demonstração estava correta.

Mediante as descrições apresentadas é possível sopesar que conhecer elementos da Geometria Plana é de fundamental importância para compreender os conceitos de novas Geometrias e outras Ciências, como salientam as DCE's a respeito dos registros de Euclides (325 ~ 260 a.C.), os quais

> [...] formalizaram o conhecimento geométrico da época e deram cientificidade à Matemática. [...] Pela maneira como são postas suas bases e pelo rigor das demonstrações, a geometria euclidiana se caracteriza como modelo lógico para as outras ciências físicas. A obra de Euclides tem uma importância excepcional na história da Matemática e exerce influência até os dias atuais, inclusive no âmbito escolar (PARANÁ, 2008, p. 55).

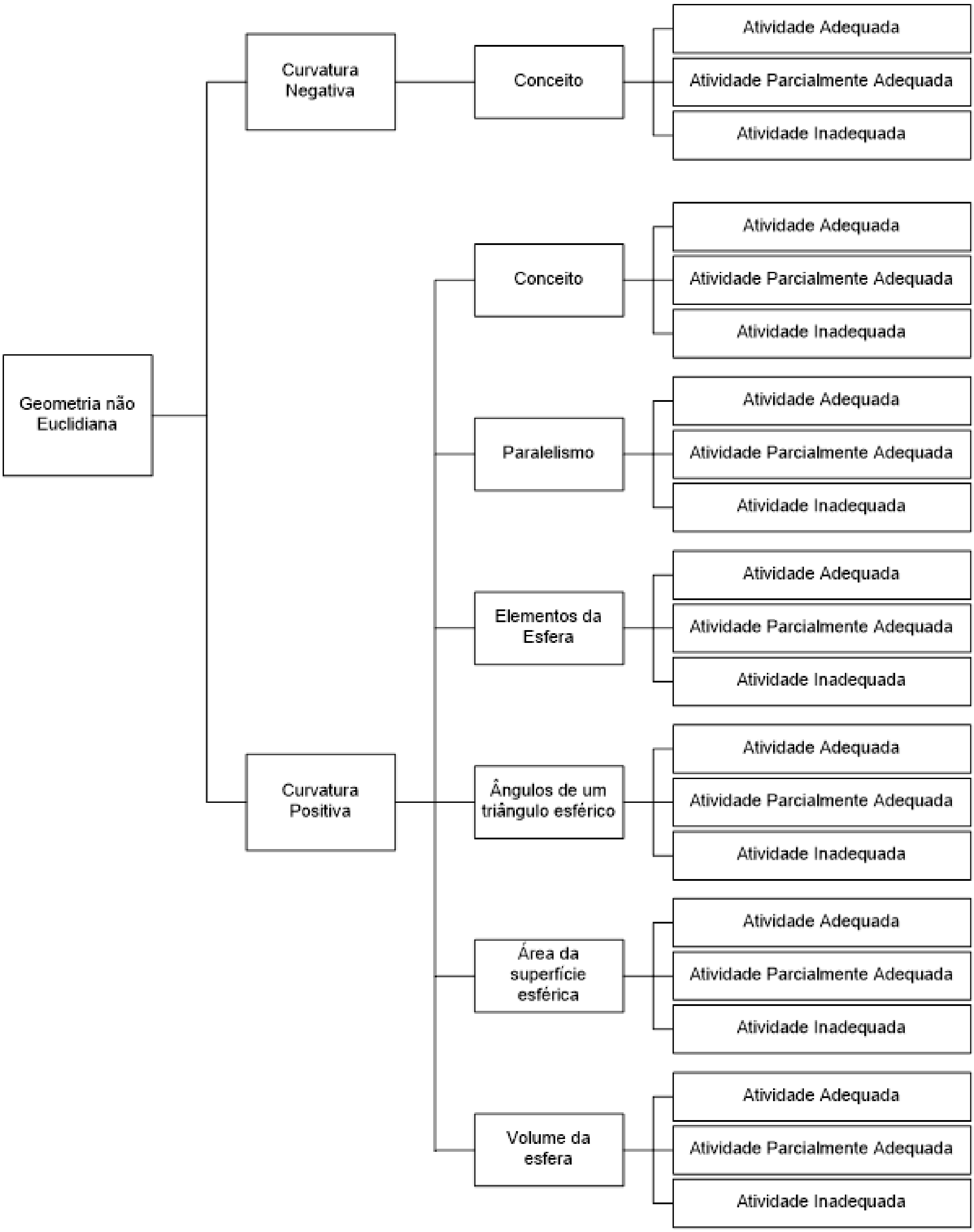
Assim, faz sentido iniciar os estudos pela Geometria Plana e compreender alguns conceitos, tais como soma dos ângulos internos de um triângulo plano; Axioma, Postulados e Teoremas, visto que historicamente os estudos do Quinto Postulado culminaram na criação das Geometrias não Euclidianas.

De modo geral, foi possível notar que os alunos, em sua maioria, apresentaram noções elementares de Geometria Plana cujos conceitos são fundamentais para compreender as bases das Geometrias não Euclidianas.

II) Subcategoria I: Geometria não Euclidiana

A Subcategoria I Geometria não Euclidiana tem por objetivo explorar o conceito de curvaturas, ângulos de um triângulo esférico, elementos da esfera, área da superfície esférica e volume da esfera, conforme Figura 23.

Figura 23 – Subcategoria I prévia: Geometria não Euclidiana.



Fonte: Os Autores (2017)

Subcategoria II: Curvatura Negativa - Conceito

Nesta Subcategoria estão presentes excertos dos pesquisados referentes ao conceito de curvatura negativa, cuja noção é crucial para a compreensão da Geometria Esférica abordada nesta pesquisa. Todas as Unidades previstas se efetivaram, como mostra o Quadro 26.

Quadro 26 – Subcategoria II: Curvatura Negativa – Conceito

Atividade Adequada	“É uma curva ‘para dentro’, como a cintura de uma mulher” (A1, E3, Q1c).
	“É algo que tem um afundamento, como a cela de um cavalo” (A10, E3, Q1c)
Atividade Parcialmente Adequada	“Uma curvatura voltada para fora. Exemplo: a nuca de uma pessoa” (A6, AVF2, Q6c).
	“Curvatura negativa é uma curva que se sobressai para fora, por exemplo uma cintura de uma mulher” (A17, E3, Q1c).
Atividade Inadequada	“É algo que tenha pouca reta e possua um pouco de curvatura, ou seja, uma curvatura semi perfeita.” (A14, E3, Q1c).
	 (A21, E3, Q2a)

Fonte: Os Autores (2017)

Na análise dos dados, percebemos que os alunos A1 e A10 definiram Curvatura Negativa de maneira adequada e citaram exemplos, evidenciando a compreensão.

Os alunos A6 e A17, ao explicarem que Curvatura Negativa é uma curva que sobressai ‘para fora’ dá a entender que estão se referindo à superfície de Curvatura Positiva, porém contradizem essa informação quando citam o exemplo da nuca de uma pessoa e da cintura da mulher.

O aluno A14 definiu Curvatura Negativa de maneira confusa e errônea, explicando que neste há um pouco de reta e um pouco de curvatura, não apresentando uma definição adequada. De maneira análoga, o aluno A21 classificou o lado interno da colher como tendo Curvatura Nula, quando a resposta correta seria Curvatura Negativa. No Quadro 27 exibimos a quantidade de respostas dadas nessa Unidade.

Quadro 27 – Subcategoria II: Curvatura Negativa: Conceito – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q1c/E3	18	01	03
Q2a/E3	21	00	01
Q6a/AVF2	15	06	01
Total	54	07	05

Fonte: Os Autores (2017)

Fica evidente que o conceito de Curvatura Negativa foi compreendido, quando 18 dos 22 pesquisados responderam adequadamente a Q1c que perguntava justamente a respeito de definição desta Curvatura. Na Q2a, apenas um aluno classificou inadequadamente um objeto como tendo Curvatura Nula, quando este apresentava Curvatura Negativa. O estudo das curvaturas é essencial para compreender os diferentes conceitos existentes entre a Geometria Euclidiana e as não Euclidianas.

Subcategoria II: Curvatura Positiva - Conceito

Nesta Subcategoria, o objetivo é apresentar o conceito da curvatura em que a Geometria Esférica é aplicada. O estudo é essencial para compreender alguns conceitos aplicados na Geometria de Curvatura Positiva. Todas as Unidades previstas se efetivaram, como mostra o Quadro 28.

Quadro 28 – Subcategoria II: Curvatura Positiva - Conceito

Atividade Adequada	“Algo como uma espécie de montanha, com uma ondulação para cima” (A3, E3, Q1b).
	“Algo redondo, que tem curvas elevadas. Ex: uma bola” (A11, E3, Q1b).
Atividade Parcialmente Adequada	“Curvatura positiva é uma superfície esférica, circular, por exemplo uma laranja, pois ela não tem linhas para fora, são interiores” (A17, E3, Q1b).
	“Curvatura para fora, parte de fora de um pote” (A22, AVF2, Q6b).
Atividade Inadequada	“Que aumenta” (A8, E3, Q1b).
	“Uma parábola” (A9, E3, Q1b)

Fonte: Os Autores (2017)

A partir dos excertos, nota-se que os alunos A3 e A11 apresentaram adequadamente o conceito de Curvatura Positiva. Já os alunos A17 e A22, apresentaram uma resolução parcialmente adequada, pois o primeiro explicou que tal curvatura está presente em uma superfície esférica, porém sua resposta ficou confusa e sem sentido, quando manifestou que uma laranja tinha linhas interiores. O A22 citou a parte de fora de um pote como exemplo de superfície que possua Curvatura Positiva, porém o exemplo dado é totalmente vago, tendo em vista que um pote pode assumir diversos formatos (cilíndrico, cônico).

As respostas dos alunos A8 e A9 foram consideradas inadequadas, pois o primeiro respondeu que Curvatura Positiva é uma curva que aumenta e o segundo não conceituou, apenas deu um exemplo que não condiz com a Curvatura Positiva.

No Quadro 29 exibimos a quantidade de alunos que responderam as questões referentes à Curvatura Positiva:

Quadro 29 – Subcategoria II: Curvatura Positiva – Conceito: Análise Quantitava

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q1b/E3	19	01	02
Q2b/E3	20	00	02
Q2c/E3	22	00	00
Q6b/AVF2	18	04	00
Total	79	05	04

Fonte: Os Autores (2017)

Pode-se notar que a maioria dos pesquisados respondeu adequadamente as questões referentes à essa Subcategoria, o que evidencia a aprendizagem satisfatória da turma.

As DCE’s orientam que é importante apresentar os conceitos de curvaturas a fim de que os estudantes do Ensino Médio percebam a “necessidade das geometrias não euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa” (PARANÁ, 2008, p. 81).

Em consonância com as Diretrizes, o Caderno de Expectativas de Aprendizagem frisa que o ensino visa que o discente “identifique a curvatura nula, positiva e negativa, como sendo da plana, esférica e hiperbólica, respectivamente” (PARANÁ, 2012, p. 94).

Desta forma, para introduzir o estudo de novas Geometrias, é necessário trabalhar conceitos e características das diferentes curvaturas.

Subcategoria II: Curvatura Positiva – Paralelismo na Esfera

Esta Subcategoria é essencial no estudo da Geometria Esférica, tendo em vista que nesta superfície não existem retas paralelas. Todas as Unidades previstas se efetivaram.

Quadro 30 – Paralelismo na Esfera

Atividade Adequada	“Concordo, pois se a reta não sofrer alteração ela ‘trombará’ em outra (desde que elas sejam do mesmo tamanho, que seria uma volta completa), se forem diferenciadas podem não se encontrar” (A4, E3, Q6).
	“Concordo, pelo fato de a superfície esférica não ser plana e sim redonda, ou melhor dizendo, uma curvatura positiva, então não existem retas paralelas na esfera” (A14, E3, Q6).
Atividade Parcialmente Adequada	“Sim, pois se você tentar traçar retas em uma superfície esférica, verá que nunca irão se encontrar se prolongadas” (A3, E3, Q6).
	“Sim, porque elas vão sempre percorrer o mesmo caminho ou direção, infinitamente passando sempre por cima dela mesma” (A7, E3, Q6a).
Atividade Inadequada	“Não concordo, pois independente de estar desenhada na esfera, elas não vão se encontrar de nenhuma maneira, mesmo elas não tendo a mesma medida” (A15, E3, Q6).
	“Não. Se a circunferência for máxima as retas sempre serão paralelas” (A21, AVF2, Q7).

Fonte: Os Autores (2017)

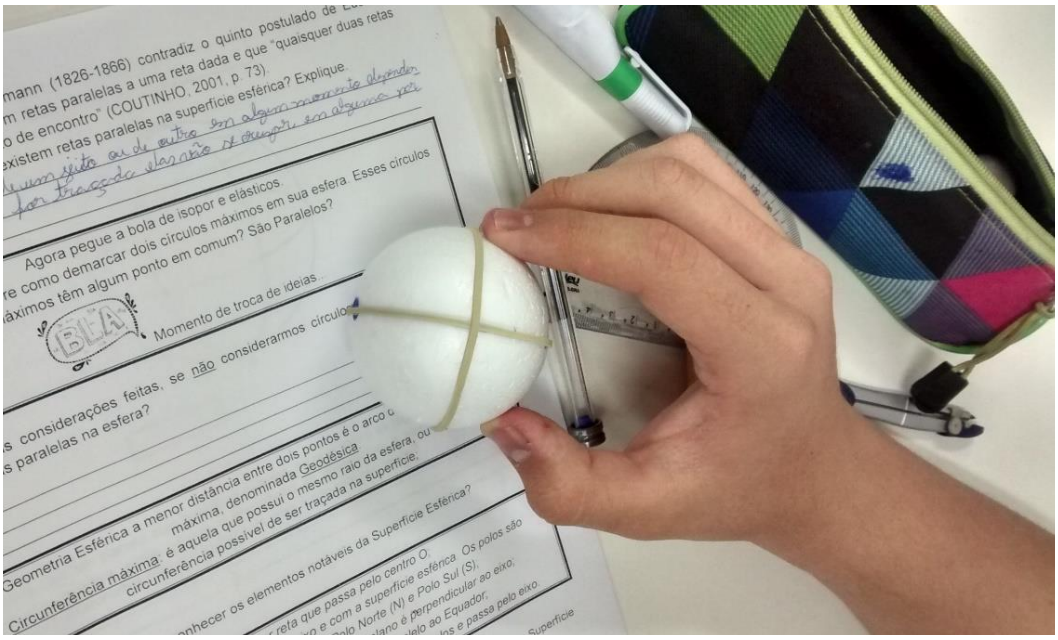
Pela análise dos materiais, selecionamos como adequados os excertos dos alunos A4 e A14 ao serem indagados se, em suas opiniões, realmente não existiam retas paralelas em uma superfície esférica, respondendo que não seria possível traçar tais retas paralelas.

As respostas dos alunos A3 e A7 foram consideradas parcialmente adequadas; o primeiro respondeu que concordava que não existem retas paralelas na superfície em estudo, porém foi divergente em sua justificativa, cujo texto apoiava a ideia de que existiam sim retas paralelas. Já o A7, respondeu que se não considerarmos círculos máximos, existem retas paralelas na superfície, entretanto, sua justificativa ficou confusa, não sendo possível compreender integralmente seu raciocínio.

As respostas consideradas inadequadas são dos A15 e A21. O primeiro argumentou que as retas traçadas na esfera não se encontram de maneira nenhuma. O A21 respondeu que se considerarmos círculos máximos, as retas sempre serão paralelas, quando o correto seria que, se há circunferências máximas, há encontro em dois pontos distintos.

Entre as Q6 e Q6a, uma atividade propunha a reflexão de como traçar círculos máximos na superfície Esférica utilizando dois elásticos, como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Aluno mostrando círculos máximos na Esfera



Fonte: Os Autores (2017)

A partir desta atividade, os alunos pesquisados passaram a ter certeza de que realmente não existem retas paralelas na Esfera.

No Quadro 31 apresentamos quantitativamente as respostas das atividades relacionadas ao assunto.

Quadro 31 – Subcategoria III: Paralelismo na Esfera – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q6/E3	07	05	10
Q6a/E3	20	01	01
Q7/AVF2	18	03	01
Total	45	09	12

Fonte: Os Autores (2017)

A Q6/E3 solicitava que os alunos respondessem se é possível traçar retas paralelas na esfera, porém apresentou um número reduzido de respostas adequadas e isso se justifica porque o conceito de retas na esfera ainda não havia sido abordado e cada aluno deveria interpretar a questão a sua maneira. Posteriormente, o conceito de retas (círculos máximos na esfera) foi apresentado e mostrado na bola de isopor.

Assim, pelos resultados presentes na tabela, percebemos que a maioria dos alunos compreendeu o assunto abordado, visto que aproximadamente 68% do total responderam as questões de maneira assertiva.

O Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Estado do Paraná (PARANÁ, 2012), julga essencial que no Ensino Médio, o estudante:

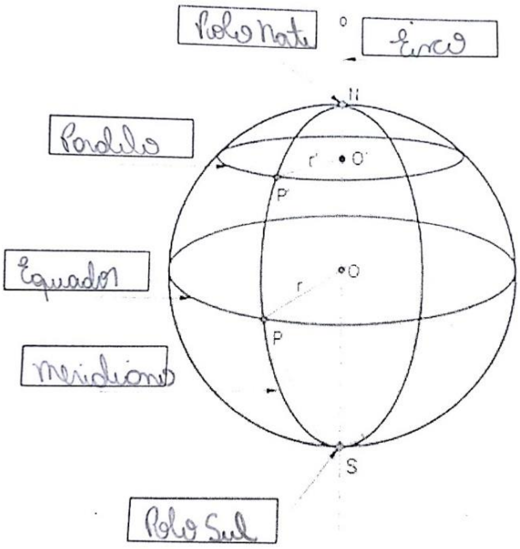
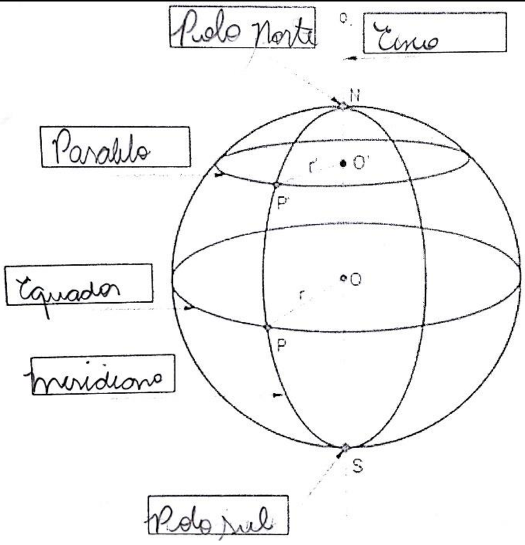
> 233. Reconheça a Geometria Hiperbólica e a Elíptica como sistemas geométricos no quais o postulado euclidiano das paralelas não se verifica;
> 234. Relacione a Geometria Hiperbólica e Elíptica com a Geometria Euclidiana, a partir da negação do postulado das paralelas;
> 235. Relacione a [...] Geometria Elíptica com a negação da existência de retas paralelas (PARANÁ, 2012, p. 94).

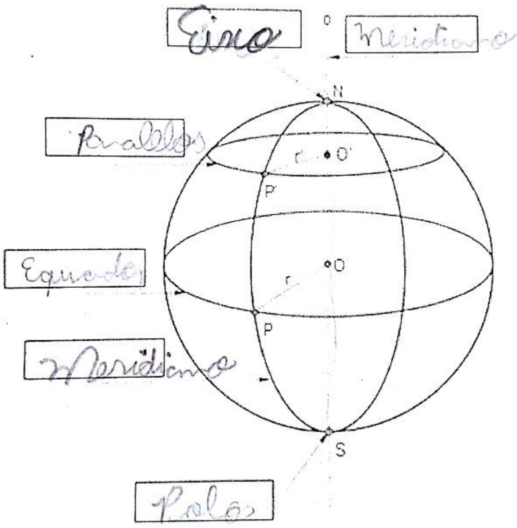
O Paralelismo na Esfera é de suma importância para compreender as diferenças básicas entre a Geometria Plana e a Geometria Esférica, pois contradiz o Quinto Postulado de Euclides quando anuncia que não existem retas paralelas na superfície de Curvatura Positiva. As retas nesta superfície são as geodésicas (círculos máximos) contidos na Esfera.

Subcategoria II: Curvatura Positiva – Elementos da Esfera

Nesta Subcategoria estão presentes os excertos dos alunos da amostra em relação aos Elementos da Esfera, cujo objetivo era apresentar seus Elementos Notáveis: eixo, polos, Equador, paralelo e meridiano. Somente as Unidades “Atividade Adequada” e “Atividade Parcialmente Adequada” se efetivaram, como mostra o Quadro 32.

Quadro 32 – Subcategoria II: Curvatura Positiva – Elementos da Esfera

Atividade Adequada	 (A2, E3, Q7)
	 (A11, E3, Q7)

Atividade Parcialmente Adequada	 (A19, E3, Q7)

Fonte: Os Autores (2017)

A partir dos excertos, nota-se que os alunos A2 e A11 representaram corretamente os elementos na Esfera. Já o aluno A19, único a apresentar uma resposta parcialmente adequada, confundiu-se ao nomear o Eixo e o Polo Norte, chamando-os de Meridiano e Eixo, respectivamente. No Quadro 33 exibimos a quantidade de respostas dadas nesta Subcategoria.

Quadro 33 – Subcategoria II: Curvatura Positiva: Elementos da Esfera – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	**Resposta Adequada**	**Resposta Parcialmente Adequada**
Q7/E3	21	01
Total	21	01

Fonte: Os Autores (2017)

Percebemos que a maioria dos alunos tinha conhecimento básico a respeito do assunto e desta forma, não houve respostas consideradas inadequadas.

Por meio do estudo dos Elementos da Esfera os estudantes compreenderam alguns pontos importantes como a linha do Equador representando uma circunferência máxima; os Paralelos representando circunferências menores, paralelas ao Equador; e, os Meridianos que representam as semicircunferências que ligam os Polos. Tais elementos são utilizados para a localização de pontos no Planeta Terra (HEIM, 2013).

Subcategoria II: Curvatura Positiva – Ângulos de um triângulo esférico

O propósito desta Subcategoria é instigar os alunos a realizar medições dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície esférica utilizando um transferidor maleável e fazer com que compreendam que a soma dos mesmos resulta em ângulo maior que 180°, porém menor que 540°. Todas as Unidades previstas foram efetivadas, como mostra o Quadro 34.

Quadro 34 – Subcategoria II: Curvatura Positiva – Ângulos de um triângulo esférico

Atividade Adequada	"Sim, os três lados são iguais porque os ângulos tem exatamente 90°, ou seja, são congruentes" (A7, E4, Q3c).
	"Não, pois a soma de cada triângulo dá um resultado diferente, nem todos são iguais" (A11, E1, Q2c).
Atividade Parcialmente Adequada	"Não, pois dependendo da superfície ele pode ter ângulos menores ou maiores" (A17, E1, Q2c).
	"Não, pelo fato de dependendo do local que você desenhar os triângulos, poderá deformá-los. Os locais mais apropriados são os de superfície plana" (A14, E1, Q2c).
Atividade Inadequada	"Não, os que foram feitos a mão (que ficaram tortos) deram mais que 180°. Os retos deram certo" (A22, E1, Q2c).
	"50°, 60°, 65°" (A17, E3, Q1b).

Fonte: Os Autores (2017)

A partir dos excertos, foi possível notar que os alunos A7 e A11 tiveram suas respostas consideradas como adequadas. O primeiro respondeu que o triângulo que ele construiu com a bola de isopor, elásticos e alfinetes cujos ângulos internos mediam 90°, também detém três lados congruentes. O segundo, ao ser indagado se era possível afirmar que a soma dos ângulos de todo triângulo é igual a 180°, respondeu que não, pois a soma de cada triângulo dava um resultado diferente.

O A17 respondeu de maneira parcialmente adequada quando indagado se a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta sempre em 180°, pois argumentou que pode resultar em um valor menor ou maior que 180°. O aluno A14 respondeu também de maneira parcialmente adequada quando negou que a soma dos ângulos de um triângulo sempre resulta em 180°, contudo o complemento da resposta não está adequado.

O A22 teve sua resposta considerada inadequada porque relacionou o uso da régua com a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para ele, quando se utiliza deste material, a soma é igual a 180°, porém ao traçarmos um triângulo à mão livre, essa soma ultrapassa os 180°. O aluno não relacionou essa situação com a superfície onde a figura foi desenhada.

O A17, ao medir com o transferidor flexível a soma dos ângulos internos do triângulo que o próprio desenhou na bexiga, o fez de maneira errônea, pois não realizou as medições corretamente e percebemos esse fato quando a soma dos ângulos resulta em 175°, o que não se aplica em um triângulo traçado na superfície esférica.

O Quadro 35 apresenta a quantidade de respostas obtidas relacionadas à soma dos ângulos de triângulos traçados na superfície esférica.

Quadro 35 – Subcategoria II: Curvatura Positiva: Ângulos de um triângulo esférico – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q2a/E1	22	00	00
Q2c/E1	18	02	02
Q1a/E3	22	00	00
Q1b/E3	20	00	02
Q1c/E3	20	00	02
Q3a/E3	21	00	01
Q3b/E3	20	00	02
Q3c/E3	21	00	01
Q3d/E3	22	00	00
Q5/AVF2	21	00	01
Total	207	02	11

Fonte: Os Autores (2017)

Pode-se notar que a maioria dos pesquisados compreendeu que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em um valor compreendido entre 180° e 540°, propriedade importante no estudo da Geometria não Euclidiana de Curvatura Positiva.

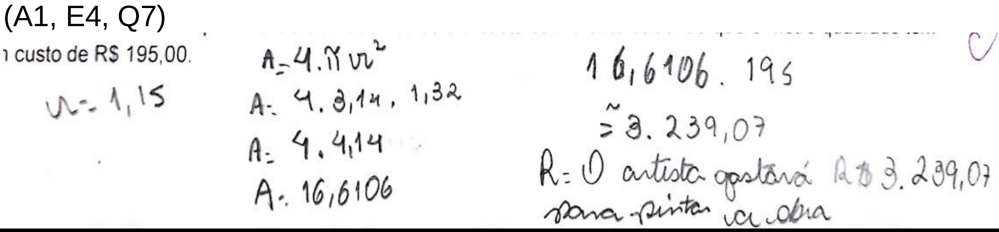
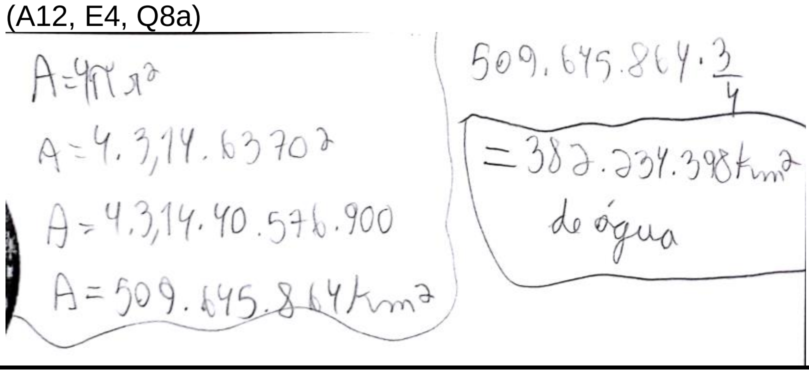
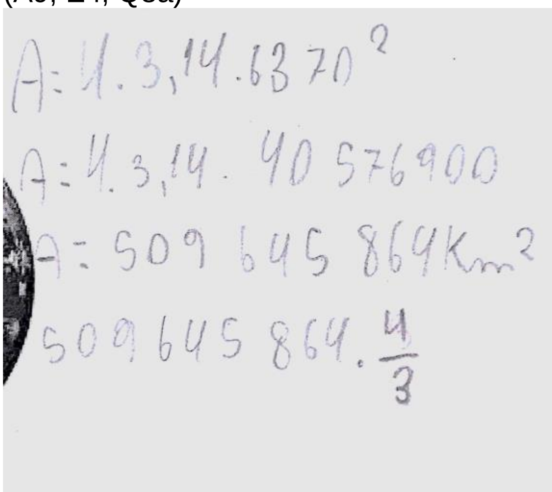
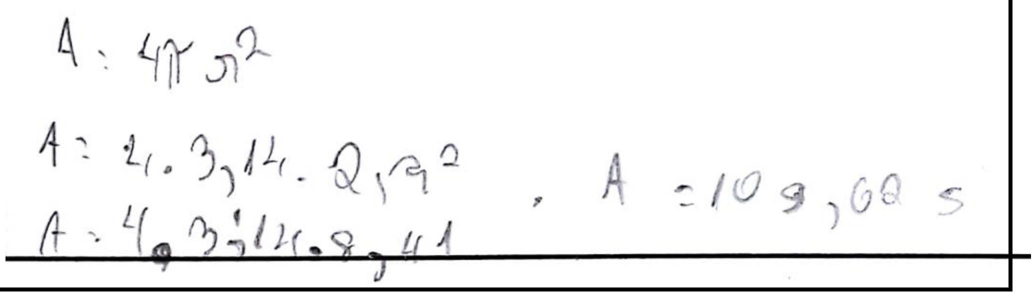
O Caderno de Expectativas de Aprendizagem espera que o estudante, no Ensino Médio “reconheça triângulos esféricos [...] e a propriedade da soma de seus ângulos internos” (PARANÁ, 2012, p. 94).

Acreditamos que, com as atividades propostas por nossa SD, os estudantes tenham atingido o objetivo previsto pelo Caderno.

Subcategoria II: Curvatura Positiva – Área da superfície esférica

Nesta Subcategoria o objetivo é explorar o conceito e o cálculo da área da superfície esférica. O Quadro 36 mostra a resolução de questões acerca do assunto. Podemos perceber que as Unidades previstas foram efetivadas.

Quadro 36 – Subcategoria II: Curvatura Positiva – Área da superfície esférica

<table>
<tr><td rowspan="2">Atividade Adequada</td><td>(A1, E4, Q7)

custo de R$ 195,00.
r = 1,15
A = 4.π r²
A = 4.3,14.1,32
A = 4.4,14
A = 16,6106
16,6106 . 195
≅ 3.239,07
R: O artista gastará R$ 3.239,07 para pintar a obra</td></tr>
<tr><td>(A12, E4, Q8a)

A = 4πr²
A = 4.3,14.6370²
A = 4.3,14.40.576.900
A = 509.645.864 km²
509.645.864 · 3/4
= 382.234.398 km² de água</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Atividade Parcialmente Adequada</td><td>(A9, E4, Q8a)

A: 4.3,14.6370²
A: 4.3,14.40576900
A: 509645864 Km²
509645864 . 4/3</td></tr>
<tr><td>(A17, E4, Q6)

A: 4πr²
A: 4.3,14.2,9²
A: 4.3,14.8,41
A = 105,625</td></tr>
</table>

Atividade Inadequada	(A6, AVF2, Q9) $1808,64 = 4.3,14.r$ $\quad r = 14,38$ $180,64 = 12.56.r$ $\quad r = 14,38$
	(A13, AVF2, Q9) $1808,64 = 4.3,14.r^2$ $\quad \frac{1804,64}{4} = r^2$ $\quad \sqrt{451,16} = r$ $1804,64 = 3,14r^2$ $\quad r = 21,24$ $\quad 21,24 = r$

Fonte: Os Autores (2017)

Aluno A1 realizou de maneira adequada o problema em que deveria encontrar o custo que um artista plástico deveria arcar para pintar sua obra de arte cuja forma era esférica. Para tanto, encontrou a área da superfície da obra e multiplicou pelo custo da tinta por metro quadrado. O Aluno A12 encontrou a área da superfície terrestre coberta por água, assim descobriu a área total da superfície do Planeta Terra e calculou 3/4 desse total, chegando ao resultado correto da questão.

O Aluno A9, ao calcular a área do Planeta Terra coberto por água, encontrou a área total da superfície terrestre corretamente, porém não realizou o comando solicitado no problema ao indicar a multiplicação desse valor por 4/3, quando deveria ter multiplicado por 3/4. Além disso, não colocou o resultado da multiplicação, deixando a questão incompleta. O Aluno A17 ao resolver o problema em que deveria encontrar a área da superfície da bolinha de isopor menor oferecida durante a aplicação da SD, realizou as substituições necessárias corretamente, entretanto ao efetuar as multiplicações, não apresentou o resultado adequado.

Os Alunos A6 e A13 não resolveram adequadamente o problema em que o valor da área da esfera era conhecido, porém o raio não. Os alunos substituíram os valores corretamente na fórmula, porém o primeiro confundiu-se ao utilizar o valor da área da superfície esférica proposto no problema, o que o fez realizar as operações de maneira errônea e esqueceu-se de que, na fórmula, o raio é elevado ao quadrado. Já o Aluno A13 fez uma subtração onde deveria dividir o valor da área da superfície da esfera por quatro e em seguida, o número quatro apareceu novamente e o 3,14 foi eliminado sem realizar operações com ele.

O Quadro 37 exibe a quantidade de respostas dadas nessa Unidade.

Quadro 37 – Subcategoria II: Curvatura Positiva: Área da superfície esférica – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q6/E4	20	02	00
Q7/E4	22	00	00
Q8a/E4	20	02	00
Q9/AVF2	11	08	03
Total	73	12	03

Fonte: Os Autores (2017)

Percebemos que a maioria respondeu de maneira adequada as questões referentes à área de superfície esférica.

Subcategoria II: Curvatura Positiva – Volume da Esférica

Esta Subcategoria objetiva compreender conceito e cálculos referentes ao volume de uma esfera. O Quadro 38 exibe excertos em relação ao assunto. Todas as Unidades previstas foram efetivadas.

Quadro 38 – Subcategoria II: Curvatura Positiva – Volume da Esfera

Atividade Adequada	(A4, AVF2,Q10) $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ $\frac{12,56 \cdot 3,375}{3}$ $\rightarrow$ $V = 14,13$
	(A20, E4, Q8b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6370^3$ $V = 1,082148051 \times 10^{12}$
Atividade Parcialmente Adequada	(A22, AVF2, Q9) $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ $V = 4 \cdot 3,14 \cdot 1,2^3$ $4 \cdot 3,14 \cdot 1,728 = 21,70368$ $\boxed{7,23456}$ $A = 4\pi r^2$ $1808,64 = 4\pi \cdot r^2$ $\frac{1808,64}{4 \cdot 3,14} = r^2$ $\frac{1808,64}{12,56} = r^2$ $144 = r^2$ $12 = r$

	(A18, E4, Q8b) $V=\frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 6370^3$ $V=1082{,}480\cdot 51\times 10^{12}$
Atividade Inadequada	(A7, AVF2, Q10) $V=4\div 9{,}42\cdot 3{,}37$ $V=4\div 31{,}74$ $V=\frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5^3$ $\boxed{V=7{,}93}$
	(A18, AVF2, Q10) $V=\frac{4}{3}\cdot \pi r^2$ $V=1{,}33\cdot\pi 1{,}5^2$ $\frac{2{,}25}{1{,}33}=1{,}6917\ldots$ $V=1{,}33\cdot\pi\, 2{,}25$

Fonte: Os Autores (2017)

Nas resoluções dos alunos A4 e A20, percebemos a aplicação da fórmula corretamente, atingindo o objetivo proposto pelos problemas. O primeiro encontrou a quantidade de recheio de chocolate que um bombom de 1,5 cm de raio deveria conter e o segundo encontrou o volume aproximado do nosso Planeta Terra.

O A22 realizou os cálculos corretamente, porém no resultado final colocou a vírgula no lugar errado, assim como o A18 ao resolver o problema que solicita o volume da Terra, também colocou a vírgula no lugar errado, o que distorce o resultado. Desta forma, tais resoluções foram consideradas parcialmente adequadas.

Dentre aqueles que tiveram suas respostas consideradas como inadequadas, selecionamos os excertos dos Alunos A7 e A18. O primeiro inseriu os dados na fórmula corretamente, porém confundiu o processo de multiplicação com a divisão de fração, multiplicando o valor de π por 3 e dividindo o resultado por quatro (quando deveria ser o contrário). O Aluno A18 também substituiu os valores corretamente na fórmula, porém para encontrar o volume, deve-se elevar o raio da Esfera a três e não a dois como fez o aluno; e, após o equívoco, realizou uma divisão que não deveria ser realizada.

O Quadro 39 exibe a quantidade de respostas dadas à Unidade Volume da Esfera:

Quadro 39 – Subcategoria II: Curvatura Positiva: Volume da Esfera – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Resposta Adequada	Resposta Parcialmente Adequada	Resposta Inadequada
Q8b/E4	15	07	00
Q9/AVF2	10	09	03
Q10/AVF2	19	00	03
Total	44	16	06

Fonte: Os Autores (2017)

Identificamos que a maioria dos alunos respondeu de maneira adequada às questões referentes ao assunto.

Mediante os dados descritos até o momento, percebemos que o ensino das Geometrias não Euclidianas é, de fato, de fundamental importância.

Entendendo a necessidade de abordar o tema em sala de aula, desenvolvemos uma SD que contempla alguns dos conceitos propostos pelas DCE's (2008) para o Ensino Médio relativo à Geometria Esférica, a saber:

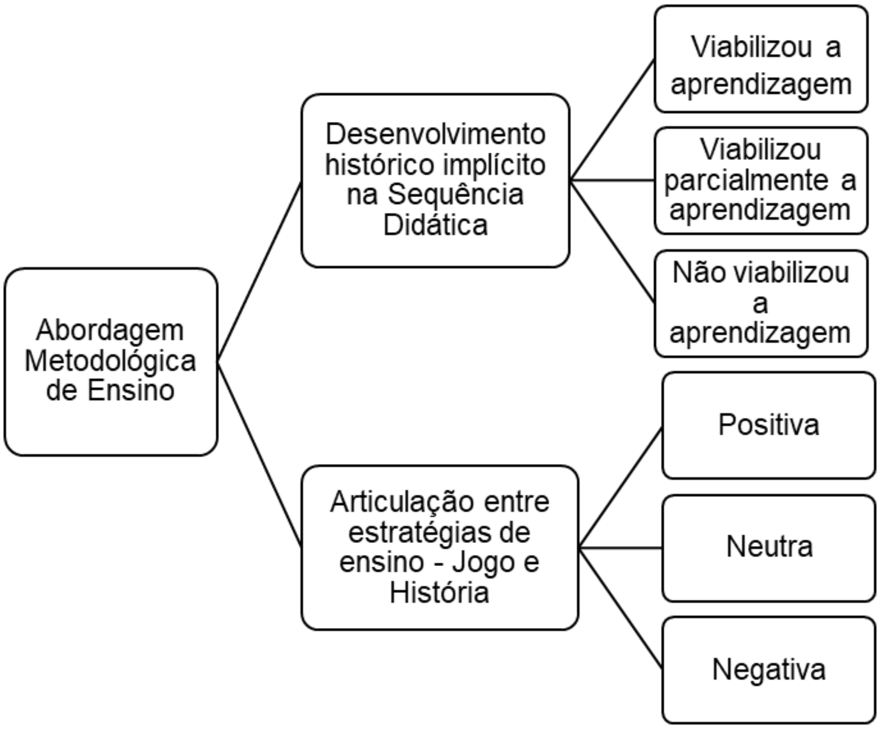
> postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Nesta SD, procuramos contemplar os conceitos citados acima, tendo em vista a importância da Geometria Esférica, pois a partir de seu estudo novos conhecimentos foram desenvolvidos, por exemplo, o Sistema de Posicionamento Global – GPS, que segundo Zanella (2011, p. 17) "é uma aplicação tecnológica que envolve conceitos da Geometria Esférica [...], localiza um ponto sobre ou fora da superfície terrestre". A Teoria da Relatividade é um outro exemplo em que conceitos das Geometrias não Euclidianas foram as bases para seu desenvolvimento (PARANÁ, 2008).

CATEGORIA II: Abordagem Metodológica de Ensino

A Segunda Categoria diz respeito à articulação entre a Abordagem Histórico-epistemológica desenvolvida durante toda a SD e o Jogo Matemático aplicado. Esta Categoria compreende duas Subcategorias e seis Unidades, conforme especificado na Figura 25.

Figura 25 – Categoria e Unidades prévias de Abordagem Metodológica de Ensino



Fonte: Os Autores (2017)

Subcategoria: Desenvolvimento histórico implícito na Sequência Didática

A Subcategoria visa verificar se a Abordagem Histórico-Epistemológica possibilita a aprendizagem efetiva dos pesquisados durante a aplicação da SD. As Unidades previstas que se efetivaram foram “Viabilizou a aprendizagem” e “Viabilizou parcialmente a aprendizagem”, como mostra o Quadro 40.

Quadro 40 – Subcategoria: Desenvolvimento histórico implícito na SD

Viabilizou a aprendizagem	“Aprendi sobre a história da Geometria não Euclidiana e todos os matemáticos que a estudaram” (A5, AVR2, Q1).
	“É preciso ter atenção na história para perceber que a matemática também teve obstáculos na evolução” (A10, AVR2, Q3).
Viabilizou parcialmente a aprendizagem	“Eram muitos matemáticos e estudiosos e isso dificultou um pouco” (A5, AVR2, Q3).
	“A variedade de datas presentes na folha, se eu tivesse que decorar, seria complicado” (A14, AVR2, Q3)

Fonte: Os Autores (2017)

A partir dos excertos dos alunos A5 e A10, constata-se que a abordagem viabilizou a aprendizagem da Geometria não Euclidiana, pois o primeiro, ao ser indagado a respeito do que ele havia aprendido na aula, respondeu que aprendeu sobre a história da Geometria não Euclidiana e sobre todos os matemáticos envolvidos no desenvolvimento desta. O A10 respondeu que é necessário prestar atenção na história para se dar conta de que a Matemática também enfrentou dificuldades em seu desenvolvimento.

Citamos os excertos dos alunos A5 e A14 para representar aqueles em que a abordagem viabilizou parcialmente a aprendizagem, pois o primeiro expôs que no desenvolvimento da Geometria não Euclidiana, estavam envolvidos muitos estudiosos, ponto que dificultou a compreensão. De maneira similar, o A14 expressou dificuldade com as muitas datas apresentadas e não seria viável se fosse necessário decorá-las.

Pela análise dos dados, a maioria dos alunos respondeu na Q3, que as dificuldades apresentas referem-se às quantidades de datas e nomes dos matemáticos envolvidos no desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas. Salientamos que a abordagem metodológica de ensino utilizada durante a SD é novidade para os alunos e julgamos natural que acorra certo estranhamento frente a essas informações. Estar ciente de nomes e datas é importante ao estudar a história da matemática, porém a nosso objetivo é fazer com que os alunos compreendam como se deu o desenvolvimento das novas Geometrias.

No Quadro 41 exibimos a quantidade de respostas dadas nessa Unidade.

Quadro 41 – Subcategoria: Desenvolvimento histórico implícito na SD – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Viabilizou a aprendizagem	Viabilizou parcialmente a aprendizagem
Q1/AVR2	19	3
Q2/AVR2	18	4
Q3/AVR2	12	10
Total	49	17

Fonte: Os Autores (2017)

Pela análise dos dados evidencia-se que, a abordagem histórico-epistemológica utilizada como metodologia de ensino para o desenvolvimento desta pesquisa e também da SD, foi eficaz e atingiu seu objetivo como “elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos” (PARANÁ, 2008, p. 66).

Subcategoria: Articulação entre estratégias de ensino - Jogo e História

Esta Subcategoria, objetiva verificar se a utilização do Jogo contribui como uma estratégia de ensino. No Quadro 42 estão presentes os excertos dos alunos pesquisados em relação ao assunto. Apenas a Unidade “Positiva” efetivou-se e por isso, optamos por apresentar quatro fragmentos para salientar o êxito em se utilizar o jogo no ensino da história da Geometria Esférica.

Quadro 42– Subcategoria: Articulação entre estratégias de ensino - Jogo e História

Positiva	“A aula foi divertida e um tanto quanto histórica, tivemos atividades diferenciadas e absorvemos o conhecimento” (A4, AVR2, Q4).
	“Através da brincadeira consegui assimilar bastante coisas sobre a Geometria não Euclidiana e sua história” (A5, AVR2, Q4).
	“Eu achei muito interessante a dinâmica feita pela professora, pois é um jeito divertido de adquirirmos conhecimento.” (A12, AVR2, Q4)
	“Achei muito legal. O jogo é divertido, o que fez nos interessar mais sobre o assunto dado no texto.” (A18, AVR2, Q4)

Fonte: Os Autores (2017)

Todos os alunos analisados julgaram que a interação entre o jogo e a história foi positiva. O A4 salientou que a aula foi divertida, com atividades incomuns, propiciando a aquisição do conhecimento. O A5 concorda que foi por meio da brincadeira (jogo) que entendeu a história da Geometria não Euclidiana. Os alunos A12 e A18 admitem que por meio do jogo é possível adquirir o conhecimento de maneira mais divertida e interessante.

Pela análise dos materiais, identificamos que os argumentos dos alunos são semelhantes quando concordam que aprender a história da Matemática por meio de um jogo, é cativante e capaz de fazer com que os alunos sintam-se motivados a aprender.

O Quadro 43 exibe a quantidade de respostas dadas em relação à essa Unidade.

Quadro 43 – Subcategoria: Articulação entre estratégias de ensino: Jogo e História – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	**Positiva**
Q4/AVR2	22
Total	22

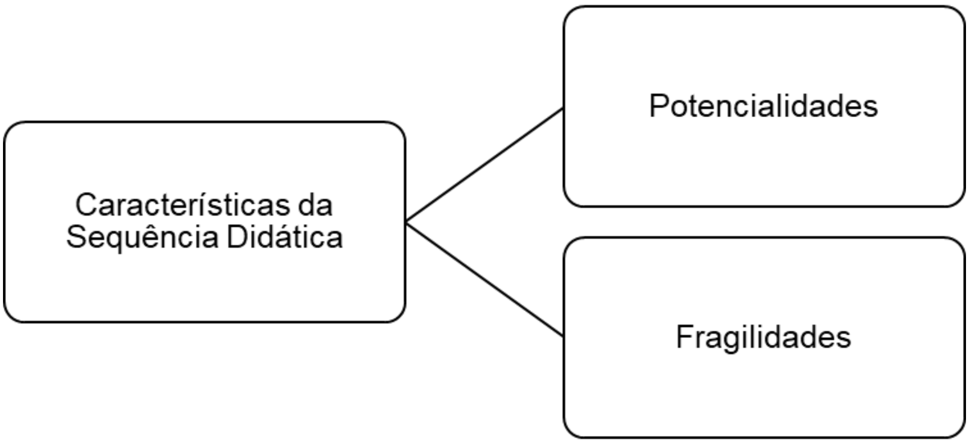
Fonte: Os Autores (2017)

Para a SD proposta nesta pesquisa, desenvolvemos o jogo para amenizar os efeitos negativos que um texto histórico ligeiramente extenso pudesse proporcionar na disciplina de Matemática e propiciar um maior interesse dos alunos em compreender a história da Matemática, pois ao longo de nossa prática docente, percebemos que os estudantes não veem com bons olhos textos longos nesta disciplina.

CATEGORIA III: Características da Sequência Didática

A terceira Categoria refere-se às impressões dos pesquisados em relação aos conteúdos abordados ao longo da SD, apontando suas Potencialidades e Fragilidades, sendo estas as Unidades da Categoria.

Figura 26 – Categoria e Unidades prévias de Características da Sequência Didática



Fonte: Os Autores (2017)

No Quadro 44 apresentamos os excertos que evidenciam as potencialidades e fragilidades da SD.

Quadro 44 – Características da Sequência Didática

Potencialidades	"Foram bem claras, porque aprendemos em etapas e sempre com exercícios fáceis de realizar e haviam textos explicando sobre cada geometria" (A7, AVF1, Q3).
	"Foram interessantes, dinâmicas e criativas e esses fatores com certeza me influenciaram a querer aprender mais" (A12, AVF1, Q5).
Fragilidades	"Fiquei em dúvida do porquê das fórmulas são daquele jeito" (A8, AVF1, Q4).
	"[...] só senti dificuldade nas contas da Geometria Esférica" (A16, AVF1, Q4).

Fonte: Os Autores (2017)

Podemos perceber que o aluno A7 demonstrou que a SD foi bastante proveitosa, pois ao ser indagado se as informações e conteúdos presentes nas atividades foram claras e de fácil compreensão respondeu que foram bastante claras, com conteúdos organizados em etapas e textos explicativos (textos históricos) a respeito das Geometrias.

O excerto do A12, se refere à Q5, questão esta que indaga se as aulas foram interessantes e despertaram a curiosidade. O aluno respondeu que foram interessantes, criativas e dinâmicas o que fez com que ele tivesse vontade de aprender cada vez mais.

Em relação à Unidade Fragilidades percebemos que o A8 ficou com dúvidas em relação ao desenvolvimento das fórmulas apresentadas no decorrer do E4 (área e volume da esfera). Porém, desenvolvê-las seria inviável por conta do nível de conhecimento matemático que tais alunos deveriam ter. Já o A16, sentiu dificuldade em resolver os cálculos que envolvem área e volume.

O Quadro 45 exibe a quantidade de respostas dadas em relação a essa Unidade.

Quadro 45 – Características da Sequência Didática – Análise Quantitativa

Atividade/ Encontro	Potencialidades	Fragilidades
Q3/AVF1	17	5
Q4/AVF1	14	8
Q5/AVF1	22	0
Total	53	13

Fonte: Os Autores (2017)

Pela análise dos dados ficou evidente que a Fragilidade da SD concentrou-se na utilização das fórmulas utilizadas para a resolução dos problemas propostos e compreensão do desenvolvimento das mesmas.

Já em relação às Potencialidades, a maioria apontou que os exercícios estavam bem explicados, as aulas bastante dinâmicas por utilizar materiais manipuláveis, promovendo uma maior compreensão dos conceitos apresentados; os fragmentos históricos estavam claros e um ponto muito importante observado pelas pesquisadoras é que a SD é autossuficiente, pois os alunos apresentaram autonomia para resolvê-las sem grandes intervenções da professora.

Em suma, um dos objetivos desta Sequência Didática é o de propiciar aos professores recursos diferenciados para apresentar o conteúdo e, aos alunos, a oportunidade de aprender coisas novas. De acordo com Zabala (1998, p.86)

> Nem tudo se aprende do mesmo modo, no mesmo tempo nem com o mesmo trabalho. [...] refletir sobre o que implica aprender o que propomos, e o que implica aprendê-lo de maneira significativa, pode

> nos conduzir a estabelecer propostas mais fundamentadas, suscetíveis de ajudar mais os alunos e ajudar a nós mesmos.

Assim, propomos aos professores do Ensino Médio a exploração da Sequência Didática, que utiliza de diferentes estratégias para apresentar um conteúdo, o que torna as aulas mais dinâmicas e induz à participação ativa dos alunos envolvidos, cooperando assim, para a aprendizagem efetiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar como se dá a elaboração de uma Sequência Didática para o Ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva – Geometria Esférica, segundo a abordagem metodológica histórico-epistemológica, voltada para alunos da 1ª série do Ensino Médio, a fim de proporcionar uma aprendizagem efetiva de um conteúdo.

Para esta pesquisa, elaboramos uma Sequência Didática com enfoques na Geometria não Euclidiana de curvatura positiva; na abordagem Histórico-Epistemológica; na Didática da Matemática e nas orientações defendidas por Zabala (2010) para a elaboração das atividades que compõem a SD.

Acreditamos que os resultados atingidos deverão proporcionar aos professores de Matemática do Ensino Médio o suporte necessário para aprofundar seus conhecimentos em relação às Geometrias não Euclidianas, sobretudo a de Curvatura Positiva e aplicar a SD aqui proposta de maneira efetiva.

As Geometrias não Euclidianas de curvatura positiva – ainda pouco abordadas em sala de aula por motivo de formação deficitária do professor, ausência do assunto em livros didáticos e número escasso de pesquisas científicas, como comprovado na Revisão Sistemática de Literatura – são de fundamental importância para o desenvolvimento intelectual do indivíduo.

É necessário que o aluno tenha consciência que a Geometria Euclidiana não é única e que diversas situações problemáticas, tanto em nosso cotidiano quanto no âmbito científico, só podem ser solucionadas por meio das Geometrias não Euclidianas. Desta forma, apresentamos uma visão ampliada dos espaços presentes em nosso cotidiano, promovendo o desenvolvimento crítico e reflexivo dos nossos alunos.

A utilização da abordagem histórico-epistemológica evidenciou alguns benefícios, visto que nossos alunos demonstraram interesse e fascinação ao descobrir que a Matemática também apresentou obstáculos em seu desenvolvimento e que, durante um longo período de tempo, matemáticos de diferentes lugares do mundo entraram em conflitos de ideias, provando que o conteúdo que chega até a sala de aula não é algo pronto e acabado, afinal por trás do conhecimento que está posto hoje, houve envolvimento de diversos intelectuais que objetivavam suprir as necessidades de suas épocas. Desta forma, o professor proporciona a humanização da matéria (MATTHEWS, 1995).

É importante salientar que a maneira como a História é apresentada faz grande diferença no nível de interesse que a mesma possa causar nos alunos. Focar demasiadamente em dados irrelevantes, datas e nomes tem grandes chances de tornar o ensino enfadonho. Desta forma, é importante enfatizar o desenvolvimento científico dos conteúdos em detrimento de dados factuais, por exemplo.

A Didática da Matemática nos proporcionou, para a elaboração da SD apresentada nesta pesquisa, uma visão de como se dá a inserção do conteúdo matemático em sala de aula. Foi por meio das contribuições de D'Amore (2007) que cuidamos para criar situações e apresentar o conteúdo da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva em sala de aula de maneira que tornasse a aprendizagem mais efetiva.

Desta forma, refletindo sobre as orientações de D'Amore (2007), desenvolvemos um jogo para facilitar a interpretação do desenvolvimento histórico das Geometrias não Euclidianas, pois evidenciamos que, pela experiência de nossa prática docente, os alunos podem não apreciar a leitura de textos longos, minimizando os benefícios que a abordagem oferece. Destarte, encontramos no jogo uma possibilidade de tornar a aprendizagem mais interessante, pois proporciona o envolvimento ativo dos estudantes.

As concepções de Zabala (2010) a respeito do conceito de uma SD, de como elaborar as atividades que as compõem e de como avaliá-las também contribuíram muito no desenvolvimento do produto educacional produzido para esta pesquisa. A diversidade de conteúdos presente na proposta – conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais – colaborou para que fosse possível elaborar uma sequência rica em tarefas variadas que visam de modo a atingir objetivos diversos, proporcionando o desenvolvimento de capacidades distintas em nossos educandos.

Articular os aportes teóricos citados, foi crucial para o desenvolvimento de uma SD eficiente para o ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva, pois hodiernamente, repensar nossa prática docente, sobre o que ensinamos, como ensinamos e para quem ensinamos é primordial para atingirmos resultados cada vez mais positivos. Frente às novas tecnologias que divertem e satisfazem nossos alunos, ensinar bem requer a utilização de metodologias e recursos diferenciados a fim de fazer com que os estudantes se sintam motivados a aprender.

Assim sendo, percebemos que, durante a aplicação da SD proposta, as discussões e as trocas de ideias entre os alunos mostraram o interesse e excitação que as atividades provocaram. O assunto inédito, a maneira progressiva como as atividades foram apresentadas e os materiais exigidos para o desenvolvimento desta, fez com a turma se mostrasse estimulada a aprender. Além disso, a SD elaborada apresentou-se autossuficiente, uma vez que os alunos mostraram autonomia ao realizarem as atividades sem grandes intervenções do professor, permitindo com que este assumisse o papel de mediador.

Pela análise dos dados, os resultados foram satisfatórios para a aprendizagem do conteúdo, pois na primeira categoria analisada, Conhecimentos Específicos, 84,4% dos alunos responderam as atividades propostas na SD de maneira adequada; 7,8% responderam de maneira parcialmente adequada e 7,8% responderam de maneira indequada.

Na segunda categoria, Abordagem Metodológica de Ensino, 75% dos alunos expressaram que tal abordagem viabiliza a aprendizagem do conteúdo e 25% relataram que viabilizou parcialmente a aprendizagem. Ainda em relação à segunda categoria, 100% dos alunos analisados classificaram como positiva a articulação entre a abordagem histórico-epistemológica e o jogo para a melhor compreensão do desenvolvimento histórico da Geometria de curvatura posititva.

Em relação à terceira categoria, Características da Sequência Didática, 80,3% dos alunos encontraram nela potencialidades e 19,7% notaram fragilidades em torno do desenvolvimento das fórmulas apresentadas para o cálculo da área e volume da esfera. Porém, como já citado anteriormente, desenvolver essas fórmulas não foi viável, visto que o conhecimento matemático necessário para a compreensão de tal desenvolvimento (cálculo integral) está além do conhecimento adquirido em uma 1ª série do Ensino Médio.

Em suma, os resultados da pesquisa evidenciam que a SD elaborada – contemplando as Geometrias não Euclidianas, sobretudo de curvatura positiva por meio da abordagem histórico-epistemológica, articulada com a Didática da Matemática e as concepções propostas por Zabala (2010) – mostrou-se eficiente no ensino deste conteúdo, proporcionando aos estudantes – que se revelaram ativos no processo – a construção gradual e efetiva do conhecimento.

Portanto, consideramos que o assunto abordado nesta pesquisa e a Sequência Didática elaborada foram eficientes e atingiram resultados satisfatórios para o ensino da Geometrias Esférica. A partir desse produto educacional outros podem ser desenvolvidos, com vistas a um aprofundamento das atividades, ou mesmo uma adequação da Sequência Didática, para diferentes níveis e contextos de ensino.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. Cenários para o Ensino e para a Aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas. **Congresso Ibero-Americanos de Ciência, Tecnologia e Inovação e Educação.** Buenos Aires, 2014. Disponível em: <www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/275.pdf> Acesso em 15 jan 2017.

ABREU, S. M; OTTONI,J. E. Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição. **Sociedade Brasileira de Matemática.** 2015 Disponível em < http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Shyrlene%20Martins%20de%20Abreu%20Versao%20Final.pdf> Acesso em 20 jan 2017.

ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria Esférica:** Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

BERNARDELLI, M. S. **A Interdisciplinaridade Educativa na Contextualização do Conceito de Transformação Química em um Curso de Ciências Biológicas.** 2014. 158 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: Euclides, **Os Elementos**. São Paulo. Editora Unesp, 2009:.

BAGIO, V. A; ROLKOUSKI, E. Geometrias não Euclidianas: impressões de estudantes em um primeiro contato. IN: **Encontro Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão: EPREM, ano XII, 2014. Disponível em: <http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/RELATOS/autores/REA055.PDF> Acesso em 11 out 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: EDUSP, 2012.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; **Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando uma Sequência Didática.** Aprendizagem Significativa em Revista, Porto Alegre, v. 3, n. 2, p. 1-21, fev. 2013.

CARAÇA, B. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 2002.

CARMO, M. P. do. Geometrias Não-Euclidianas. In: **Matemática Universitária**, São Paulo, n 6, dezembro de 1987, p 25-48. Disponível em: <

http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n06/n06_Artigo02.pdf> Acesso em: 09 jul. 2013.

CARVALHO, M. A. S. TUCCI, A. M. F. C. **O ensino de geometria não euclidiana na educação básica.** In: Conferência Interamericana de Educação Matemática**.** Recife: CIAEM, ano XIII, 2011. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2625/816> Acesso em 20 nov. 2016.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas**. 2. Ed. – Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

D´AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). ***Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas***. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

D'AMORE, B. **Elementos da Didática da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007a.

D'AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Bolema. Boletim de Educação Matemática**. Vol. 20, n° 28, 1179-205. ISSN: 0103-636X, 2007b.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa Qualitativa em Educação**. Fundamentos e tradições. Porto Alegre: AMGH, 2010.

EVES, H. Introdução à História da Matemática; tradução Hygino H. Domingues. 5ª Ed. – Campinas – SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRAGOSO, W. C. **História da Matemática**: uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

GALVÃO, M. S., SANTOS. L. A, BARBOSA, J. P. C. Demonstrações por Redução ao Absurdo no Volume I do Elementos de Euclides. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, XII, 2016, São Paulo.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5 ed. - São Paulo : Atlas, 2002.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf> Acesso em: 05 mai. 2017.

GOMES, M. P. **Geometria Esférica:** uma proposta de estudo e atividades para a escola básica. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói.

HEIM, L. **Geometria Esférica:** Proposta de Atividades em Conexão com a Geografia. 2013. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Rio de Janeiro, 2013.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Houaiss**. 1 ed. São Paulo; Moderna, 2011

KATZ, V. J. **História da Matemática.** Lisboa: FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN, 2010.

LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p 3-13.

LUCAS, L. B. **Contribuições axiológicas e epistemológicas ao ensino da teoria da evolução de Darwin.** 2010. 167 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

LUCAS, L.B. e BATISTA, I.L. Contribuições axiológicas e epistemológicas ao ensino da Teoria da Evolução de Darwin. **Investigação em Ensino de Ciências**, v. 16 (2), pp. 245-273, 2011.

LUCCAS, S. **Abordagem Histórico-Filosófica na Educação Matemática:** Apresentação de uma Proposta Pedagógica. 2004. 222 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

MATTHEWS, M. R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

MARTINS, L. A.P. História da Ciência: objetos, métodos e problemas. **Ciência & Educação,** Bauru, v. 11, n. 2, p. 305-317, 2005.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação, área de concentração Metodologia do Ensino), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. Ijuí; Unijuí, 2014.

NOBRE, S.; BARONI, R. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999

OLIVEIRA, A. B. G. **Geometrias Hiperbólica e Esférica: uma proposta didática baseada na resolução de problemas.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PAIS, C.L. **Estratégias de ensino de Geometria em livros didáticos de Matemática em nível de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental**. In: GT: Educação Matemática nº 19. Anais da Anped, 2006. Disponível em:

<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf> Acesso em 20 nov. 2016.

PETIT, J. P. **Os mistérios da geometria.** Lisboa. Gráfica Barbosa & Santos , 1982. 69 p.

PINHEIRO, R. M. **Sistema de numeração à luz da abordagem histórico-epistemológica**.2016. 119 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2016.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.
Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. SEED: Curitiba, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.
Caderno de Expectativas de Aprendizagem. SEED: Curitiba, 2012.

SANTOS, W. T. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico.** 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

SILVA, A. P. B. **O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX.** 2006. Tese (Doutora em Ciências) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ZABALA, A. **A prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2010.

ZANELLA, I.A.; **Geometria Esférica:** Uma proposta de Atividades com Aplicações. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES DE IDADE

Gostaríamos de obter o seu consentimento para o(a) menor ____ participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada: **Geometria não Euclidiana de Curvatura Positiva:** uma proposta de sequência didática à luz da abordagem histórico-epistemológica, referente ao Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus Cornélio Procópio.

A forma de participação consiste na realização de atividades propostas pelas pesquisadoras no período de contraturno escolar.

O nome do(a) aluno(a) não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garante o anonimato. A divulgação dos resultados será de forma a não identificar os(as) voluntários(as).

Mesmo depois de consentir com a participação do(a) menor, você pode desistir da continuação da participação do mesmo, ou seja, você tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta de dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo ao aluno(a).

Você não terá despesa alguma e, também não receberá remuneração alguma.

Desde já agradecemos a atenção e a participação e colocamo-nos à disposição para maiores informações.

Em caso de dúvidas ou informações, entre em contato com as pesquisadoras nos endereços eletrônicos: xxxxxxxxxx@xxxxx.xx ou xxxxxxxxxx@xxxxx.xx ou pelos telefones: (xx) xxxxx-xxxx; ou (xx) xxxxx-xxxx.

Eu,____(nome do responsável ou representante legal), portador do RG nº ____________________, confirmo que as pesquisadoras xxxxxxxxxxx e Profª Drª. xxxxxxxxxx explicaram-me os objetivos desta pesquisa, bem como a forma de participação do(a) menor. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, eu concordo em dar meu consentimento para que o(a) menor participe como voluntário(a) desta pesquisa.

Bandeirantes ___/____/2017

____

Assinatura do responsável ou representante legal.

APÊNDICE B
TERMO DE ASSENTIMENTO

Eu, ____, concordo em participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada: **Geometria não Euclidiana de Curvatura Positiva:** uma proposta de sequência didática à luz da abordagem histórico-epistemológica, das pesquisadoras xxxxxxxxxxx e Profª Drª. xxxxxxxxxxx, referente ao Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus Cornélio Procópio, desde que seja garantido meu anonimato nas publicações e divulgações dos resultados desta pesquisa.

____
Assinatura do(a) aluno(a)

Assinatura dos Pesquisadores responsáveis:

____
xxxxxxxxxxxxxxx
Pesquisadora

____
xxxxxxxxxxxxxxx
Orientadora

Cornélio Procópio ___/___/2017